เอกลักษณ์และการจำแนกจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

โดย
นายจิรเมธ พันธ์พิมพ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร
ปีการศึกษา 2563

เอกลักษณ์และการจำแนกจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

โดย
นายจิรเมธ พันธ์พิมพ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร
ปีการศึกษา 2563

IDENTITIES AND CHARACTERIZATIONS OF ISOSCELES TRIANGULAR NUMBERS

By

MR. Jiramate PUNPIM

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for Master of Science (MATHEMATICS)

Department of MATHEMATICS

Graduate School, Silpakorn University

Academic Year 2020

หัวข้อ	เอกลักษณ์และการจำแนกจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
โดย	จิรเมธ พันธ์พิมพ์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก	รองศาสตราจารย์ ดร. สมพงค์ จิตต์มั่น

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(รองศาสตราจารย์ ดร.จุไรรัตน์ นันทานิช)

พิจารณาเห็นชอบโดย

.....ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.จิตติศักดิ์ รักบุตร)

.....อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก
(รองศาสตราจารย์ ดร.สมพงค์ จิตต์มั่น)

.....ผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก
(รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล)

61305205 : คณิตศาสตร์ แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
คำสำคัญ : ลำดับของจำนวนเต็ม, จำนวนสามเหลี่ยม, จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว, จำนวนกำลังสองสมบูรณ์, จำนวนหลายเหลี่ยมปรกติ

นาย จิรเมธ พันธ์พิมพ์: เอกลักษณ์และการจำแนกจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : รองศาสตราจารย์ ดร. สมพงศ์ จิตต์มั่น

จำนวนสามเหลี่ยมได้รับความสนใจและมีการศึกษาอย่างต่อเนื่อง เนื่องจากมีรูปแบบที่สวยงาม คุณสมบัติที่ดี และสามารถเชื่อมโยงกับคณิตศาสตร์เรื่องอื่น ๆ ในวิทยานิพนธ์นี้เรามุ่งเน้นไปที่นัยทั่วไปของจำนวนสามเหลี่ยมนั่นคือจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ได้มีการให้ลักษณะเฉพาะและเอกลักษณ์บางประการสำหรับจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วรวมทั้งการเชื่อมโยงกับจำนวนหลายเหลี่ยมรูปแบบอื่น ๆ ซึ่งผลลัพธ์ของจำนวนสามเหลี่ยมสามารถมองเป็นกรณีเฉพาะของงานวิจัยนี้

61305205 : Major (MATHEMATICS)
Keyword : INTEGER SEQUENCES, TRIANGULAR NUMBERS, ISOSCELES TRIANGULAR NUMBERS, SQUARES, POLYGONAL NUUMBERS

MR. JIRAMATE PUNPIM : IDENTITIES AND CHARACTERIZATIONS OF ISOSCELES TRIANGULAR NUMBERS THESIS ADVISOR : ASSOCIATE PROFESSOR SOMPHONG JITMAN, Ph.D.

Triangular numbers have been of interest and continuously studied due to their beautiful representations, nice properties, and various links with other mathematical objects. In this thesis, we focus on a generalized notion of triangular numbers, namely, an isosceles triangular number. Some characterizations and identities for isosceles triangular numbers are presented as well as links with other figurate numbers. Results on triangular numbers can be viewed as a special case.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จเรียบร้อยด้วยความกรุณาของ รศ. ดร.สมพงศ์ จิตต์มั่น ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งเป็นผู้ให้ความรู้อันเป็นประโยชน์และช่วยแนะนำ แก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ด้วยความเอาใจใส่และให้กำลังใจมาโดยตลอด อีกทั้งยังสละเวลาอันมีค่าเพื่อวิทยานิพนธ์นี้ ขอขอบคุณ รศ. ดร.จิตติศักดิ์ รักบุตร และ รศ. ดร.ศจี เพียรสกุล กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ซึ่งได้ให้คำแนะนำและเติมเต็มส่วนต่าง ๆ จนเป็นวิทยานิพนธ์ที่สมบูรณ์ ผู้จัดทำจึงขอกราบขอบพระคุณท่านเป็นอย่างสูง ณ ที่นี้ด้วย

จิรเมธ พันธ์พิมพ์

สารบัญ

บทคัดย่อภาษาไทย . . . . . ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ . . . . . จ

กิตติกรรมประกาศ . . . . . ฉ

สารบัญ . . . . . ช

บทที่ 1 บทนำ 1

บทที่ 2 ลักษณะเฉพาะของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 7

2.1 ลักษณะเฉพาะและการสร้างจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบบเวียนเกิด 7

2.2 จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วและจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ 11

บทที่ 3 เอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 19

3.1 เอกลักษณ์เชิงการบวกและเอกลักษณ์เชิงการคูณ 19

3.2 เอกลักษณ์รูปแบบเวียนเกิด 22

3.3 เอกลักษณ์เชิงยกกำลัง 30

บทที่ 4 บทสรุป 36

รายการอ้างอิง 37

ประวัติผู้เขียน 39

บทที่ 1

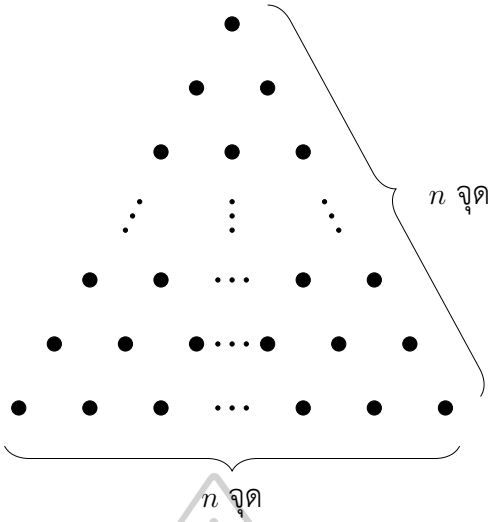
บทนำ

จำนวนสามเหลี่ยม (triangular number) คือจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบซึ่งเขียนแทนจำนวนจุดที่จัดเรียงเชิงเรขาคณิตบนระนาบเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งระยะห่างระหว่างจุดมีค่าเท่ากัน จำนวนสามเหลี่ยมเป็นจำนวนเชิงรูป (figurate number) รูปแบบหนึ่ง [2] สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n **จำนวนสามเหลี่ยมอันดับที่** n (nth triangular number) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $T(n)$ คือ จำนวนจุดบนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าบนระนาบซึ่งมีจำนวนจุดบนด้านเท่ากับ n จุด ซึ่งมีค่าเท่ากับผลรวมของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n ทำให้ได้ว่าจำนวนสามเหลี่ยมอันดับที่ n คือ อนุกรมเลขคณิต

$$\begin{aligned} T(n) &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

เพื่อความสะดวกในการศึกษาสมบัติและอธิบายเอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมนิยมกำหนดให้ $T(0) = 0$

ดังกล่าวไว้แล้วข้างต้นว่าจำนวนสามเหลี่ยมสามารถเขียนแทนด้วยการจัดเรียงจุดบนระนาบเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งระยะห่างระหว่างจุดมีค่าเท่ากัน เมื่อพิจารณาจำนวนสามเหลี่ยมอันดับที่ n จะได้ว่าจำนวนสามเหลี่ยมอันดับที่ n สามารถแสดงด้วยจำนวนจุดบนระนาบเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1: จำนวนสามเหลี่ยม $T(n)$

การศึกษาเกี่ยวกับจำนวนสามเหลี่ยมเริ่มขึ้นตั้งแต่ 6 ศตวรรษก่อนคริสตกาล เนื่องจากจำนวนสามเหลี่ยมมีคุณสมบัติที่น่าสนใจและมีความสัมพันธ์กับจำนวนเชิงรูปรูปแบบอื่น ตลอดจนมีความเชื่อมโยงกับแนวคิดอื่นทางคณิตศาสตร์ ทำให้มีการศึกษาจำนวนสามเหลี่ยมอย่างต่อเนื่องและแพร่หลายใน [1], [2], [3] และในเอกสารอ้างอิงที่ปรากฏในเอกสารข้างต้น ใน [2], [4] และ [9] มีการให้ลักษณะเฉพาะของจำนวนสามเหลี่ยมและความสัมพันธ์ที่น่าสนใจระหว่างจำนวนสามเหลี่ยมและจำนวนเชิงรูปอื่น ๆ ใน [2], [8] และ [10] มีการศึกษาลำดับย่อยของจำนวนสามเหลี่ยมหลายรูปแบบที่มีคุณสมบัติน่าสนใจ เอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมเป็นที่สนใจและได้รับการศึกษาใน [1], [2], [3], [5], [11] เป็นต้น

ใน [6] มีการนิยามและศึกษาจำนวนซึ่งเป็นนัยทั่วไปของจำนวนสามเหลี่ยม คือ จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (isosceles triangular number) ซึ่งจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วจะสามารถแสดงด้วยจำนวนจุดที่จัดเรียงบนระนาบเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งจำนวนจุดของแต่ละแถวเพิ่มเป็นค่าคงตัว สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n และ l **จำนวนสามเหลี่ยม**

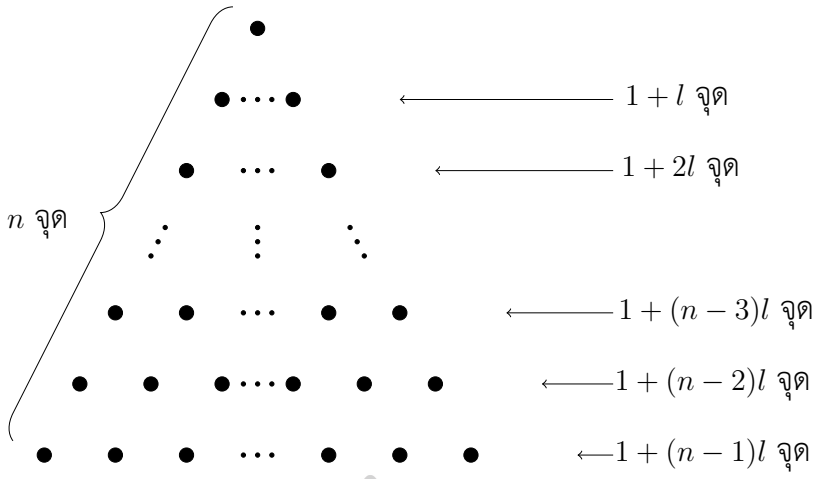
หน้าจั่ว-l **อันดับที่** n (nth l-isosceles triangular number) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $T(n,l)$ คือ จำนวนของจุดบนรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งมีจำนวนแถว n แถว และจำนวนจุดของแต่ละแถวเพิ่มขึ้นแถวละ l จุด อีกนัยหนึ่งจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l อันดับที่ n สามารถแสดงได้ด้วยอนุกรมเลขคณิต

$$\begin{aligned} T(n,l) &= 1 + (1+l) + (1+2l) + \cdots + (1+(n-1)l) \\ &= n + \frac{n(n-1)l}{2} \end{aligned}$$

สำหรับบริบทที่อันดับมีความชัดเจนหรือบริบทที่อันดับไม่เฉพาะเจาะจง จะเรียกจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l อันดับที่ n ว่า **จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว**-l

จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l เป็นกรณีเฉพาะของจำนวนสี่เหลี่ยมคางหมูนัยทั่วไป ซึ่งศึกษาใน [7] และเห็นได้ชัดว่าจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $T(n,l)$ คือจำนวนสามเหลี่ยม $T(n)$ เมื่อ $l = 1$ เพื่อความสะดวกในการศึกษาสมบัติของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วจะกำหนดให้ $T(0,l) = 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก l ใน [6] มีการศึกษาสมบัติพื้นฐานของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เช่น ภาวะคู่-คี่ ผลบวก เป็นต้น ซึ่งเป็นนัยทั่วไปจากสมบัติของจำนวนสามเหลี่ยม

จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l อันดับที่ n หรือ $T(n,l)$ สามารถแสดงเป็นจุดในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2: จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $T(n,l)$

จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $T(4,2)=16$ และ $T(4,3)=22$ สามารถเขียนแสดงเชิงรูปด้วยการจัดเรียงจุดบนระนาบเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ดังตัวอย่างที่ 1.0.1

ตัวอย่างที่ 1.0.1. จำนวนเต็มบวก 16 และ 22 เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-2 อันดับที่ 4 และจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-3 อันดับที่ 4 ตามลำดับ ซึ่งสามารถแสดงเชิงรูปด้วยการจัดเรียงจุดบนระนาบเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ดังนี้

(a) $T(4,2)=16$

(b) $T(4,3)=22$

รูปที่ 1.3: จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $T(4,2)=16$ และ $T(4,3)$=22

จำนวนกำลังสองสมบูรณ์ (square number) คือจำนวนเต็มบวกซึ่งสามารถเขียน

แทนด้วยจำนวนจุดบนระนาบเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีระยะห่างระหว่างจุดเท่ากัน สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n **จำนวนกำลังสองสมบูรณ์อันดับที่** n (nth square number) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $S(n)$ นิยามโดย

$$S(n) = n^2$$

จำนวนหลายเหลี่ยม (polygonal number) [2] คือ จำนวนเต็มบวกที่สามารถแสดงด้วยจำนวนจุดบนระนาบที่จัดเรียงเป็นรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าปรกติ (regular polygon) ซึ่งระยะห่างระหว่างจุดมีค่าเท่ากัน สำหรับจำนวนเต็มบวก n และ m **จำนวน** m **เหลี่ยมอันดับที่** n เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(n,m)$ คือผลรวมเลขคณิต

$$\begin{aligned} P(n,m) &= 1 + (1 + (m-2)) + (1 + 2(m-2)) + \cdots + (1 + (m-2)(n-1)) \\ &= n + \frac{n(n-1)(m-2)}{2} \end{aligned}$$

จากบทนิยามจะเห็นได้อย่างชัดเจนว่า $T(n,l) = P(n,l+2)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และ l ซึ่งทำให้ได้ว่าจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคือการเลื่อนลำดับของจำนวนหลายเหลี่ยม อย่างไรก็ตาม ในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้แนวคิดและสัญลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วเพื่อนำเสนอนัยทั่วไปของจำนวนสามเหลี่ยมและความสวยงามของเอกลักษณ์บางเอกลักษณ์ที่นำเสนอในบทที่ 3

ดังกล่าวแล้วข้างต้น จำนวนสามเหลี่ยมเป็นจำนวนที่น่าสนใจ มีการศึกษากันอย่างต่อเนื่องและแพร่หลาย โดยเฉพาะอย่างยิ่งการให้ลักษณะเฉพาะของจำนวนสามเหลี่ยมและการพิสูจน์เอกลักษณ์รูปแบบต่าง ๆ ของจำนวนสามเหลี่ยม ลักษณะเฉพาะของจำนวนสามเหลี่ยมที่รู้จักกันอย่างแพร่หลาย [3] คือ “จำนวนเต็มบวก N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมก็ต่อเมื่อ $9N+1$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยม” และ “N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมก็ต่อเมื่อ $8N+1$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์” วัตถุประสงค์แรกของวิทยานิพนธ์นี้คือการให้ลักษณะเฉพาะ

ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งเป็นนัยทั่วไปของจำนวนสามเหลี่ยมข้างต้น วัตถุประสงค์ประการที่สองคือการขยายเอกลักษณ์บางประการของจำนวนสามเหลี่ยมใน [4] และ [5] ให้เป็นจริงสำหรับจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จากการทบทวนและเปรียบเทียบวรรณกรรมการให้ลักษณะเฉพาะและเอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ไม่เคยปรากฏหรือมีการเผยแพร่มาก่อนทั้งในแง่ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วหรือจำนวนหลายเหลี่ยม

วิทยานิพนธ์นี้ประกอบด้วย 4 บท คือ บทที่ 1 เป็นการรวบรวมบทนิยาม ที่มาและความสำคัญ และวรรณกรรมต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง บทที่ 2 กล่าวถึงลักษณะเฉพาะของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วและการเชื่อมโยงกับจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ บทที่ 3 กล่าวถึงเอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งขยายจากผลลัพธ์ของจำนวนสามเหลี่ยม บทที่ 4 เป็นการสรุปภาพรวมของวิทยานิพนธ์นี้

บทที่ 2

ลักษณะเฉพาะของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ในบทนี้เป็นการให้ลักษณะเฉพาะของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว พร้อมด้วยความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วกับจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ เมื่อ $l = 1$ ผลลัพธ์ที่เกี่ยวข้องกับเอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l สามารถใช้สรุปลักษณะเฉพาะของจำนวนสามเหลี่ยมได้ด้วย

2.1 ลักษณะเฉพาะและการสร้างจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบบเวียนเกิด

ในหัวข้อนี้ เราสนใจลักษณะเฉพาะของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งขยายมาจากสมบัติของจำนวนสามเหลี่ยม "จำนวนเต็มบวก N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมก็ต่อเมื่อ $9N + 1$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยม" ใน [3] และการใช้ลักษณะเฉพาะที่ได้ในการสร้างจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบบเวียนเกิด

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ได้นำเสนอลักษณะเฉพาะของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l ซึ่งสามารถประยุกต์เพื่อสร้างจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l แบบเวียนเกิดได้โดยตรง

ทฤษฎีบทที่ 2.1.1. *ให้ N และ l เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ r และ s เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $r = (2l+1)^2$ และ $s = \dfrac{l^3 - 3l^2 + 4}{2}$ จะได้ว่า N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l ก็ต่อเมื่อ $rN + s$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l*

บทพิสูจน์. สมมติให้ N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l จะได้ว่า $N = n + \dfrac{n(n-1)l}{2}$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก n ทำให้ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
rN + s &= (2l+1)^2\left(n + \frac{n(n-1)l}{2}\right) + \frac{l^3 - 3l^2 + 4}{2} \\
&= \frac{n^2 l(2l+1)^2 + (2-l)n(2l+1)^2 + l^3 - 3l^2 + 4}{2} \\
&= \frac{4l^3n^2 + 4l^2n^2 + ln^2 + 8l^2n + 8ln + 2n - 4l^3n - 4l^2n - ln + l^3 - 3l^2 + 4}{2} \\
&= \frac{(4l^3 + 4l^2 + l)n^2 - (4l^3 - 4l^2 - 7l - 2)n + (l^3 - 3l^2 + 4)}{2} \\
&= \frac{(4l^3 + 4l^2 + l)n^2 - (4l^3 - 6l^2 - 4l)n + (l^3 - 4l^2 + 4l) + (-2l^2 + 3l + 2)n + (l^2 - 4l + 4)}{2} \\
&= \frac{l\left((4l^2 + 4l + 1)n^2 - (4l^2 - 6l - 4)n + (l^2 - 4l + 4)\right) - (l-2)\left((2l+1)n - (l-2)\right)}{2} \\
&= \frac{l\left((2l+1)n - (l-2)\right)^2 - (l-2)\left((2l+1)n - (l-2)\right)}{2} \\
&= \frac{2\left((2l+1)n - (l-2)\right) + l\left((2l+1)n - (l-2)\right)^2 - l\left((2l+1)n - (l-2)\right)}{2} \\
&= \left((2l+1)n - (l-2)\right) + \frac{\left((2l+1)n - (l-2)\right)\left(\left((2l+1)n - (l-2)\right) - 1\right)l}{2} \\
&= T((2l+1)n - (l-2), l)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $rN+s$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l

ในทางกลับกัน สมมติให้ $rN+s$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l จะได้ว่า

$$rN+s = n + \frac{n(n-1)l}{2} \tag{2.1}$$

สำหรับบางจำนวนเต็มบวก n ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
N &= \frac{2n+ln^2-ln-2s}{2r} \\
&= \frac{2n+ln^2-ln-(l^3-3l^2+4)}{2(2l+1)^2} \\
&= \frac{l\left(n^2+2n(l-2)+(l-2)^2\right)-(l-2)(2l+1)(n+l-2)}{2(2l+1)^2} \\
&= \frac{l(n+l-2)^2-(l-2)(2l+1)(n+l-2)}{2(2l+1)^2} \\
&= \frac{\dfrac{l(n+l-2)^2}{(2l+1)^2}-\dfrac{(l-2)(n+l-2)}{2l+1}}{2} \\
&= \frac{\dfrac{2(n+l-2)}{2l+1}+\dfrac{l(n+l-2)^2}{(2l+1)^2}-\dfrac{l(n+l-2)}{2l+1}}{2} \\
&= \frac{n+l-2}{2l+1}+\frac{\left(\dfrac{n+l-2}{2l+1}\right)\left(\dfrac{n+l-2}{2l+1}-1\right)l}{2}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$N = \frac{2n+ln^2-ln-(l^3-3l^2+4)}{2(2l+1)^2} = \frac{(ln-l^2+l+2)(n+l-2)}{2(2l+1)^2}$$

เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ว่า $(2l+1)^2|(ln-l^2+l+2)(n+l-2)$

ถ้า $(2l+1)|(n+l-2)$ จะได้ว่า $\dfrac{(n+l-2)}{(2l+1)} \in \mathbb{N}$ สมมติให้ $(2l+1) \nmid (n+l-2)$

เนื่องจาก

$$ln-l^2+l+2 = l(n+l-2)-(2l+1)(l-2)$$

และ $\gcd(l, 2l+1) = 1$ ทำให้ได้ว่า $(2l+1) \nmid l(n+l-2)$ นั่นคือ $(2l+1) \nmid (ln-l^2+l+2)$ ดังนั้น $(2l+1)^2 \nmid (ln-l^2+l+2)(n+l-2)$ ซึ่ง เกิดข้อขัดแย้ง ทำให้ได้ว่า $(2l+1)|(n+l-2)$ ซึ่งหมายความว่า $\dfrac{(n+l-2)}{(2l+1)}$ เป็นจำนวน เต็มบวก

เพราะฉะนั้น

$$N = \frac{n+l-2}{2l+1} + \frac{\left(\dfrac{n+l-2}{2l+1}\right)\left(\dfrac{n+l-2}{2l+1} - 1\right) l}{2} = T\left(\frac{n+l-2}{2l+1}, l\right)$$

เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l ตามต้องการ $\square$

เห็นได้ชัดว่า ถ้า $l = 1$ จะได้ลักษณะเฉพาะ “N เป็นจำนวนสามเหลี่ยม ก็ต่อเมื่อ $9N + 1$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยม” ของจำนวนสามเหลี่ยม สำหรับ $l \in \{2, 3, 4\}$ จะได้ผลลัพธ์ต่อไปนี้

- จำนวนเต็มบวก N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-2 ก็ต่อเมื่อ $25N$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-2 (ซึ่งสมมูลกับการที่ N เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์)
- จำนวนเต็มบวก N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-3 ก็ต่อเมื่อ $49N + 2$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-3
- จำนวนเต็มบวก N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-4 ก็ต่อเมื่อ $81N + 10$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-4

ตัวอย่างการคำนวณผลลัพธ์จากทฤษฎีบทที่ 2.1.1 แสดงไว้ในตารางต่อไปนี้

n	l	$N = T(n,l)$	$r = (2l+1)^2$	$s = \dfrac{l^3 - 3l^2 + 4}{2}$	$rN + s$
2	2	$4 = T(2,2)$	25	0	$100 = T(10,2)$
3	2	$9 = T(3,2)$	25	0	$225 = T(15,2)$
2	3	$5 = T(2,3)$	49	2	$247 = T(13,3)$
3	3	$12 = T(3,3)$	49	2	$590 = T(20,3)$
2	4	$6 = T(2,4)$	81	10	$496 = T(16,4)$
3	4	$15 = T(3,4)$	81	10	$1225 = T(25,4)$
2	5	$7 = T(2,5)$	121	27	$874 = T(19,5)$

โดยทั่วไปแล้วสำหรับจำนวนเต็มบวก l เราสามารถสร้างจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l แบบเวียนเกิดได้โดยตรงจากทฤษฎี 2.1.1

2.2 จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วและจำนวนกำลังสองสมบูรณ์

ในหัวข้อนี้เรานำเสนอความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วและจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ โดยเน้นการให้นัยทั่วไปของสมบัติที่ว่า “N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมก็ต่อเมื่อ $8N+1$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์” [3] และในส่วนท้ายจะนำเสนอความสัมพันธ์เชิงผลบวกของจำนวนกำลังสองสมบูรณ์และจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วด้วย

ทฤษฎีบทต่อไปนี้กล่าวถึงเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l ที่จะเป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์

ทฤษฎีบทที่ 2.2.1. *ให้ N และ l เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l ก็ต่อเมื่อ $8Nl+(l-2)^2$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ และ $\sqrt{8Nl+(l-2)^2} \equiv l+2 \pmod{2l}$*

บทพิสูจน์. สมมติให้ N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l จะได้ว่า

$$N = n + \frac{n(n-1)l}{2}$$

สำหรับบางจำนวนเต็มบวก n ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} 8Nl + (l-2)^2 &= 8nl + 4n(n-1)l^2 + (l-2)^2 \\ &= (2nl)^2 - 2(2nl)(l-2) + (l-2)^2 \\ &= (2nl - l + 2)^2 \end{aligned}$$

เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ และ $\sqrt{8Nl + (l-2)^2} \equiv 2nl - l + 2 \equiv l + 2 \pmod{2l}$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $8Nl + (l-2)^2$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ และ $\sqrt{8Nl + (l-2)^2} \equiv l + 2 \pmod{2l}$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็มบวก m ซึ่ง

$$\sqrt{8Nl + (l-2)^2} = 2lm + (l+2)$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} 8Nl + (l-2)^2 &= (2lm + (l+2))^2 \\ &= 4l^2m^2 + 4lm(l+2) + (l+2)^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} N &= \frac{4l^2m^2 + 4lm(l+2) + (l+2)^2 - (l-2)^2}{8l} \\ &= \frac{8ml + 8l + 4(m+1)ml^2}{8l} \\ &= (m+1) + \frac{(m+1)ml}{2} \\ &= T(m+1, l) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l ตามต้องการ $\square$

สำหรับ $l = 1$ จะได้ว่า $8Nl + (l-2)^2 = 8N + 1$ เป็นจำนวนคี่เสมอ ดังนั้น ถ้า $8Nl + (l-2)^2$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ แล้ว

$$\sqrt{8Nl + (l-2)^2} \equiv \sqrt{8N+1} \equiv 1 \equiv l + 2 \pmod{2l}$$

โดยทฤษฎีบทที่ 2.2.1 ทำให้เราได้ผลลัพธ์ต่อไปนี้

บทแทรกที่ 2.2.2 ([3]). *ให้ N เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า N เป็นจำนวนสามเหลี่ยม ก็ต่อเมื่อ $8N + 1$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์*

ตัวอย่างของผลลัพธ์ในทฤษฎีบทที่ 2.2.1 ได้แสดงไว้ในตารางต่อไปนี้

n	l	$N = T(n,l)$	$8Nl + (l-2)^2$	$\sqrt{8Nl + (l-2)^2} \equiv l + 2 \pmod{2l}$
2	2	$4 = T(2,2)$	$64 = 8^2$	$8 \equiv 4 \pmod{4}$
3	2	$9 = T(3,2)$	$144 = 12^2$	$12 \equiv 4 \pmod{4}$
2	3	$5 = T(2,3)$	$121 = 11^2$	$11 \equiv 5 \pmod{6}$
3	3	$12 = T(3,3)$	$289 = 17^2$	$17 \equiv 5 \pmod{6}$
2	4	$6 = T(2,4)$	$196 = 14^2$	$14 \equiv 6 \pmod{8}$
3	4	$15 = T(3,4)$	$484 = 22^2$	$22 \equiv 6 \pmod{8}$
2	5	$7 = T(2,5)$	$289 = 17^2$	$17 \equiv 7 \pmod{10}$

ทฤษฎีบทต่อไปกล่าวถึงลักษณะเฉพาะของผลรวมของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l จำนวน k จำนวน ซึ่งเป็นนัยทั่วไปของทฤษฎีบทที่ 2.2.1

ทฤษฎีบทที่ 2.2.3. *ให้ l, k และ N เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า N เป็นผลรวมของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l รวมกัน k จำนวน ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็มบวก $u_1, u_2, \ldots, u_k$ ซึ่ง*

1. $8lN + k(l-2)^2 = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_k^2$ *และ*

2. $u_i \equiv l+2 \pmod{2l}$ *สำหรับทุก* $i = 1, 2, \ldots, k$

บทพิสูจน์. สมมติให้ N เป็นผลรวมของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l จำนวน k จำนวน จะได้ว่า

$$N = \sum_{i=1}^{k} T(m_i, l)$$

สำหรับบางจำนวนเต็มบวก m_i ทำให้ได้ว่า

$$N = \sum_{i=1}^{k} \left(m_i + \frac{m_i(m_i-1)l}{2} \right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{2m_i + m_i^2 l - m_i l}{2}$$

และ

$$\begin{aligned} 8lN + k(l-2)^2 &= k(l-2)^2 + 4l \sum_{i=1}^{k} \left(2m_i + m_i^2 l - m_i l\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(4m_i^2 l^2 - 4m_i l(l-2) + (l-2)^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (2m_i l - (l-2))^2 \end{aligned}$$

สำหรับแต่ละ $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ ให้ $u_i = 2m_i l - (l-2)$ ทำให้ได้ว่า

$$8lN + k(l-2)^2 = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_k^2$$

และ $u_i \equiv 2lm_i - (l-2) \equiv l+2 \pmod{2l}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$

ในทางกลับกัน สมมติว่ามีจำนวนเต็มบวก $u_1, u_2, \ldots, u_k$ ซึ่ง

$$8lN + k(l-2)^2 = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_k^2$$

และ $u_i \equiv l+2 \pmod{2l}$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, k$ แต่ละ $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ ให้ $m_i = \dfrac{u_i + (l-2)}{2l}$ เนื่องจาก $u_i \equiv l+2 \pmod{2l}$ ทำให้ได้ว่า m_i เป็นจำนวนเต็มบวก เพราะฉะนั้น

$$N = \sum_{i=1}^{k} T(m_i, l)$$

เป็นผลรวมของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l จำนวน k จำนวน $\square$

ตัวอย่างของผลลัพธ์ในทฤษฎีบทที่ 2.2.3 เมื่อ $k = 2$ ได้แสดงไว้ในตารางต่อไปนี้

a	b	l	$T(a,l)$	$T(b,l)$	N	$8lN + k(l-2)^2$	$u_i \equiv l + 2 \pmod{2l}$
1	2	2	1	4	5	$80 = 4^2 + 8^2$	$4, 8 \equiv 4 \pmod 4$
2	3	2	4	9	13	$208 = 8^2 + 12^2$	$8, 12 \equiv 4 \pmod 4$
1	2	3	1	5	6	$146 = 5^2 + 11^2$	$5, 11 \equiv 5 \pmod 6$
2	4	3	5	22	27	$650 = 11^2 + 23^2$	$11, 23 \equiv 5 \pmod 6$

ตัวอย่างของผลลัพธ์ในทฤษฎีบทที่ 2.2.3 เมื่อ $k = 3$ ได้แสดงไว้ในตารางต่อไปนี้

a	b	c	l	$T(a,l)$	$T(b,l)$	$T(c,l)$	N	$8lN + k(l-2)^2$	$u_i \equiv l + 2 \pmod{2l}$
1	2	3	2	1	4	9	14	$224 = 4^2 + 8^2 + 12^2$	$4, 8, 12 \equiv 4 \pmod 4$
1	3	5	2	1	9	25	35	$560 = 4^2 + 12^2 + 20^2$	$4, 12, 20 \equiv 4 \pmod 4$
1	2	3	3	1	5	12	18	$435 = 5^2 + 11^2 + 17^2$	$5, 11, 17 \equiv 5 \pmod 6$
2	2	3	3	5	5	12	22	$531 = 11^2 + 11^2 + 17^2$	$11, 11, 17 \equiv 5 \pmod 6$

เมื่อพิจารณาทฤษฎีบทที่ 2.2.3 ในกรณีที่ $k = 1$ จะได้ว่าผลลัพธ์คือทฤษฎีบทที่ 2.2.1 และเมื่อพิจารณาทฤษฎีบทที่ 2.2.3 ในกรณีที่ $l = 1$ จะได้ผลลัพธ์สำหรับจำนวนสามเหลี่ยมดังแสดงในบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรกที่ 2.2.4 ([3]). *ให้ k และ N เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า N เป็นผลรวมของจำนวนสามเหลี่ยมรวมกัน k จำนวน ก็ต่อเมื่อ $8N+k$ เป็นผลรวมของจำนวนกำลังสองสมบูรณ์คี่ k จำนวน*

เมื่อวิเคราะห์กรณี $k = 2$ ในทฤษฎีบทที่ 2.2.3 จะได้ว่าจำนวนเต็มบวก N เป็นผลรวมของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l จำนวน 2 จำนวน ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็มบวก u และ v ซึ่ง $8lN + 2(l-2)^2 = u^2 + v^2$ และ $u \equiv v \equiv l + 2 \pmod{2l}$ ในทฤษฎีบทถัดไปเป็นการให้ลักษณะเฉพาะทางเลือกสำหรับกรณีนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.2.5. *ให้ l และ N เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า N เป็นผลรวมของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l จำนวน 2 จำนวน ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็มบวก u และ v ซึ่ง*

1. $4lN + (l-2)^2 = u^2 + v^2$ *และ*
2. $u + v \equiv l + 2 \pmod{2l}$ *และ* $u - v \equiv l + 2 \pmod{2l}$

บทพิสูจน์. สมมติให้ N เป็นผลรวมของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l จำนวน 2 จำนวน จะได้ว่า

$$N = T(m, l) + T(n, l)$$

สำหรับบางจำนวนเต็มบวก m และ n ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} N &= m + \frac{m(m-1)l}{2} + n + \frac{n(n-1)l}{2} \\ &= \frac{2m + m(m-1)l + 2n + n(n-1)l}{2} \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}
4lN + (l-2)^2 &= 2l\,(2m + m(m-1)l + 2n + n(n-1)l) + (l-2)^2 \\
&= 4ml + 2m^2l^2 - 2ml^2 + 4nl + 2n^2l^2 - 2nl^2 + (l-2)^2 \\
&= (lm)^2 + (ln)^2 + (l-2)^2 + 2l^2mn - 2(l-2)lm \\
&\quad - 2(l-2)ln + (lm)^2 - 2mnl^2 + (ln)^2 \\
&= (l(m+n) - (l-2))^2 + (l(m-n))^2
\end{aligned}$$

ให้ $u = l(m+n) - (l-2)$ และ $v = l(m-n)$ จะได้ว่า $4lN + (l-2)^2 = u^2 + v^2$ ทำให้ได้ว่า $u + v \equiv 2lm - l + 2 \equiv l + 2 \pmod{2l}$ และ $u - v \equiv 2ln - l + 2 \equiv l + 2 \pmod{2l}$ ตามต้องการ

ในทางกลับกัน สมมติว่ามีจำนวนเต็มบวก u และ v ซึ่ง

$$4lN + (l-2)^2 = u^2 + v^2$$

และ $u + v \equiv l + 2 \pmod{2l}$ และ $u - v \equiv l + 2 \pmod{2l}$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติว่า $u \geq v$ ให้ $m = \dfrac{u + v + (l-2)}{2l}$ และ $n = \dfrac{u - v + (l-2)}{2l}$ เนื่องจาก $u + v \equiv l + 2 \pmod{2l}$ และ $u - v \equiv l + 2 \pmod{2l}$ ทำให้ได้ว่า m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก เพราะฉะนั้น

$$N = T(m,l) + T(n,l)$$

ตามต้องการ $\square$

ตัวอย่างของผลลัพธ์ในทฤษฎีบทที่ 2.2.5 ได้แสดงไว้ในตารางต่อไปนี้

a	b	l	$T(a,l)$	$T(b,l)$	N	$4lN+(l-2)^2$	$u+v, u-v \equiv l+2 \pmod{2l}$
1	2	2	1	4	5	$40 = 2^2+6^2$	$2+6, 2-6 \equiv 4 \pmod 4$
2	3	2	4	9	13	$104 = 2^2+10^2$	$2+10, 2-10 \equiv 4 \pmod 4$
1	2	3	1	5	6	$73 = 3^2+8^2$	$3+8, 3-8 \equiv 5 \pmod 6$
2	4	3	5	22	27	$325 = 6^2+17^2$	$6+17, 6-17 \equiv 5 \pmod 6$

ผลลัพธ์ที่น่าสนใจเกี่ยวกับจำนวนสามเหลี่ยมอีกสมบัติหนึ่ง คือ ผลรวมของจำนวนสามเหลี่ยมสองจำนวนที่เรียงติดกันเป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ [11, สมการ (1)] นั่นคือ

$$T(n)+T(n+1)=(n+1)^2 \tag{2.2}$$

ในทฤษฎีบทต่อไปนี้เราพิสูจน์ว่า $l=1$ เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่ทำให้ผลรวมของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว-l สองอันที่ต่อเนื่องกันเป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์

ทฤษฎีบทที่ 2.2.6. *ให้ l เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า $T(n,l)+T(n+1,l)$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ก็ต่อเมื่อ $l=1$*

บทพิสูจน์. สมมติให้ $l \geq 2$ สังเกตได้ว่า $T(n,l)+T(n+1,l)=n^2l+2n+1$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า $T(1,l)+T(1+1,l)=l+3$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ ก็ต่อเมื่อ $2^2(l+3)$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ สมมติว่า $T(1,l)+T(1+1,l)=l+3$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ จะได้ว่า $l \geq 6$ และ $2^2(l+3) \geq 36$ เนื่องจาก $(l+3)$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ จะได้ว่า $2^2(l+3)$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ ซึ่งทำให้ได้ว่า $T(2,l)+T(2+1,l)=4l+5=2^2(l+3)-7$ ไม่เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ ดังนั้น $T(n,l)+T(n+1,l)$ จึงไม่ใช่จำนวนกำลังสองสมบูรณ์สำหรับ $n=1$ หรือ $n=2$

บทกลับเป็นจริงโดย (2.2) □

บทที่ 3

เอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ในบทนี้เป็นการสร้างและพิสูจน์เอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วโดยมุ่งเน้นการขยายเอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมใน [1], [2], [3], [5] และ [11] สู่เอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เพื่อให้ผู้อ่านสามารถติดตามและเข้าใจผลลัพธ์ในบทนี้ได้ง่ายขึ้น เราได้แสดงตัวอย่างการคำนวณและเอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมที่สัมพันธ์กันควบคู่ไว้ด้วย

3.1 เอกลักษณ์เชิงการบวกและเอกลักษณ์เชิงการคูณ

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอเอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งเกี่ยวข้องกับการบวกและการคูณ

ทฤษฎีบทแรกเป็นเอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่เกี่ยวข้องกับจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วอันดับที่ $m+n$ ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.1.1. $T(m+n,l) = T(m,l) + T(n,l) + lmn$ *สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก* l, m *และ* n

บทพิสูจน์. ให้ l, m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$T(m+n,l) = m + n + \frac{m + n(m+n-1)l}{2}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
T(m+n,l) &= m+n+\frac{(m^2-m+n^2-n+2mn)l}{2} \\
&= \frac{2m+2n+m^2l-ml+n^2l-nl+2lmn}{2} \\
&= \frac{2m+m(m-1)l+2n+n(n-1)l+2lmn}{2} \\
&= m+\frac{m(m-1)l}{2}+n+\frac{n(n-1)l}{2}+lmn \\
&= T(m,l)+T(n,l)+lmn
\end{aligned}$$

ดังนั้น $T(m+n,l) = T(m,l)+T(n,l)+lmn$ □

ตัวอย่างของผลลัพธ์ในทฤษฎีบทที่ 3.1.1 ได้แสดงไว้ในตารางต่อไปนี้

m	n	l	$T(m,l)$	$T(n,l)$	$T(m,l)+T(n,l)+lmn$	$T(m+n,l)$
2	2	2	4	4	16	$16 = T(4,2)$
3	4	2	9	16	49	$49 = T(7,2)$
2	3	3	5	12	35	$35 = T(5,3)$
2	4	3	5	22	51	$51 = T(6,3)$

สำหรับ $l = 1$ ในทฤษฎีบทที่ 3.1.1 จะได้เอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมใน [11, สมการ (4a)] ดังต่อไปนี้

$$T(m+n) = T(m)+T(n)+mn$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m และ n

สำหรับทฤษฎีบทถัดไปจะนำเสนอเอกลักษณ์ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วอันดับที่ mn

ทฤษฎีบทที่ 3.1.2. $T(mn,l) = T(m,l)T(n,l) + (2-l)lT(m-1)T(n-1)$ *สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก* m, n *และ* l

บทพิสูจน์. ให้ m, n และ l เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
T(mn,l) &= mn + \frac{mn(mn-1)l}{2} \\
&= \frac{4mn + 2m^2n^2l - 2mnl}{4} \\
&= \frac{(2m + m^2l - ml)(2n + n^2l - nl)}{4} + \frac{(2l - l^2)(m^2 - m)(n^2 - n)}{4} \\
&= \left(m + \frac{m(m-1)l}{2}\right)\left(n + \frac{n(n-1)l}{2}\right) \\
&\quad + (2-l)l\left(\frac{(m-1)m}{2}\right)\left(\frac{(n-1)n}{2}\right) \\
&= T(m,l)T(n,l) + (2-l)lT(m-1)T(n-1)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $T(mn,l) = T(m,l)T(n,l) + (2-l)lT(m-1)T(n-1)$ □

ตัวอย่างของผลลัพธ์ในทฤษฎีบทที่ 3.1.2 ได้แสดงไว้ในตารางต่อไปนี้

m	n	l	$T(m,l)$	$T(n,l)$	$T(m,l)T(n,l)$ $+(2-l)lT(m-1)T(n-1)$	$T(mn,l)$
2	2	2	4	4	16	$16 = T(4,2)$
3	4	2	9	16	144	$144 = T(12,2)$
2	3	3	5	12	51	$51 = T(6,3)$
2	4	3	5	22	92	$92 = T(8,3)$

เมื่อแทนค่า $l = 1$ ในทฤษฎีบทที่ 3.1.2 จะได้เอกลักษณ์สำหรับจำนวนสามเหลี่ยม

$$T(mn) = T(m)T(n) + T(m-1)T(n-1)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m และ n ใน [11, สมการ (17a)]

3.2 เอกลักษณ์รูปแบบเวียนเกิด

ในหัวข้อนี้กล่าวถึงเอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วในรูปแบบลำดับเวียนเกิด นำเสนอความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ระหว่างจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วอันดับต่าง ๆ ซึ่งเป็นนัยทั่วไปของเอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยม

ทฤษฎีบทที่ 3.2.1. $nT(n+1,l)-(l-1)n=(n+2)T(n,l)$ *สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก* n *และ* l

บทพิสูจน์. ให้ n และ l เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
nT(n+1,l)-(l-1)n &= n\left((n+1)+\frac{(n+1)nl}{2}\right)-nl+n \\
&= n\left(\frac{2n+2+n^2l+nl}{2}\right)-nl+n \\
&= \frac{2n^2+2n+n^3l+n^2l-2nl+2n}{2} \\
&= \frac{2n^2+n^3l-n^2l+4n+2n^2l-2nl}{2} \\
&= (n+2)\left(\frac{2n+n^2l-nl}{2}\right) \\
&= (n+2)\left(n+\frac{n(n-1)l}{2}\right) \\
&= (n+2)T(n,l)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $nT(n+1,l)-(l-1)n=(n+2)T(n,l)$ □

สำหรับ $l=1$ จะได้เอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมในรูปแบบ

$$nT(n+1)=(n+2)T(n)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ใน [5, สมการ (1.7)]

ตัวอย่างของผลลัพธ์ในทฤษฎีบทที่ 3.2.1 ได้แสดงไว้ในตารางต่อไปนี้

n	l	$T(n,l)$	$T(n+1,l)$	$nT(n+1,l)-(l-1)n$	$(n+2)T(n,l)$
2	2	4	9	16	16
3	2	9	16	45	45
2	3	5	12	20	20
3	4	15	28	75	75

ทฤษฎีบทที่ 3.2.2. $T(2n+1,l)-T(2n,l)=T(n+1,l)-T(n-1,l)+(l-1)$ *สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก* n *และ* l

บทพิสูจน์. ให้ n และ l เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
T(2n+1,l)-T(2n,l) &= 2n+1+\frac{(2n+1)(2n)l}{2}-2n-\frac{(2n)(2n-1)l}{2}\\
&= \frac{4n+2+4n^2l+2nl-4n-4n^2l+2nl}{2}\\
&= \frac{2n+2+n^2l+nl-2n+2-n^2l+3nl-2l+2l-2}{2}\\
&= n+1+\frac{(n+1)(n)l}{2}-(n-1)-\frac{(n-1)(n-2)l}{2}+l-1\\
&= T(n+1,l)-T(n-1,l)+(l-1)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $T(2n+1,l)-T(2n,l)=T(n+1,l)-T(n-1,l)+(l-1)$ □

สำหรับ $l=1$ จะได้เอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมในรูปแบบ

$$T(2n+1)-T(2n)=T(n+1)-T(n-1)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ทฤษฎีบทที่ 3.2.3. $T(2n,l) = 3T(n,l) + lT(n-1) + (l-1)n$ *สำหรับจำนวนเต็มบวก* n *และ* l

บทพิสูจน์. ให้ n และ l เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
3T(n,l) + lT(n-1) + (l-1)n &= 3\left(n + \frac{n(n-1)l}{2}\right) + l\left(\frac{(n-1)n}{2}\right) + (l-1)n \\
&= \frac{6n + 3n^2l - 3nl + n^2l - nl + 2nl - 2n}{2} \\
&= \frac{4n + (4n^2 - 2n)l}{2} \\
&= 2n + \frac{2n(2n-1)l}{2} \\
&= T(2n,l)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $T(2n,l) = 3T(n,l) + lT(n-1) + (l-1)n$ □

ทฤษฎีบทประกอบที่ 3.2.4. $lT(n-1) + (l-1)n = T(n-1) + (l-1)T(n)$ *สำหรับจำนวนเต็มบวก* n *และ* l

บทพิสูจน์. ให้ n และ l เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
T(n-1) + (l-1)T(n) &= \frac{(n-1)n}{2} + (l-1)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \frac{n^2 - n + n^2l + nl - n^2 - n}{2} \\
&= \frac{n^2l - nl + 2nl - 2n}{2} \\
&= l\left(\frac{(n-1)n}{2}\right) + (l-1)n \\
&= lT(n-1) + (l-1)n
\end{aligned}$$

ดังนั้น $lT(n-1) + (l-1)n = T(n-1) + (l-1)T(n)$ □

โดยทฤษฎีบทที่ 3.2.3 และทฤษฎีบทประกอบ 3.2.4 จะได้เอกลักษณ์ต่อไปนี้

บทแทรกที่ 3.2.5. $T(2n,l) = 3T(n,l) + T(n-1) + (l-1)T(n)$ *สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก* n *และ* l

สำหรับ $l = 1$ จะได้เอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมในรูปแบบ

$$T(2n) = 3T(n) + T(n-1)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ใน [5, สมการ (1.12)]

ตัวอย่างของผลลัพธ์ในบทแทรกที่ 3.2.3 แสดงดังตารางต่อไปนี้

n	l	$T(n,l)$	$3T(n,l) + T(n-1) + (l-1)T(n)$	$T(2n,l)$
3	2	9	36	36
4	3	22	92	92
5	4	45	190	190
3	5	18	81	81

ทฤษฎีบทที่ 3.2.6. $T(2n+1,l) = 3T(n,l) + T(n+1,l) + 2(l-1)n$ *สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก* n *และ* l

บทพิสูจน์. ให้ n และ l เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
T(2n+1,l) &= 2n+1+\frac{(2n+1)(2n)l}{2} \\
&= \frac{4n+2+4n^2l+2nl}{2} \\
&= \frac{6n+3n^2l-3nl+2n+2+n^2l+nl+4nl-4n}{2} \\
&= 3\left(n+\frac{n(n-1)l}{2}\right)+\left(n+1+\frac{(n+1)(n)l}{2}\right)+2ln-2n \\
&= 3T(n,l)+T(n+1,l)+2(l-1)n
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$T(2n+1,l) = 3T(n,l) + T(n+1,l) + 2(l-1)n$$

ตามต้องการ $\square$

ตัวอย่างของผลลัพธ์ในทฤษฎีบทที่ 3.2.6 ได้แสดงไว้ในตารางต่อไปนี้

n	l	$T(n,l)$	$T(n+1,l)$	$3T(n,l)+T(n+1,l)+2(l-1)n$	$T(2n+1,l)$
3	2	9	16	49	49
4	3	22	35	117	117
5	4	45	66	231	231
3	5	18	34	112	112

ทฤษฎีบทที่ 3.2.7. *$lT(2n+1,l) = 3lT(n,l) + lT(n+1,l) + 4nT(l-1)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และ l*

บทพิสูจน์. ให้ n และ l เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
lT(2n+1,l) &= l\left(2n+1+\frac{(2n+1)(2n)l}{2}\right) \\
&= \frac{4nl+2l+4n^2l^2+2nl^2}{2} \\
&= \frac{6nl+3n^2l^2-3nl^2+2nl+2l+n^2l^2+nl^2+4nl^2-4nl}{2} \\
&= 3\left(n+\frac{n(n-1)l}{2}\right) + l\left(n+1+\frac{(n+1)(n)l}{2}\right) + 4n\left(\frac{(l-1)l}{2}\right) \\
&= 3lT(n,l) + lT(n+1,l) + 4nT(l-1)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$lT(2n+1,l) = 3lT(n,l) + lT(n+1,l) + 4nT(l-1)$$

ตามต้องการ $\square$

เมื่อกำหนด $l = 1$ ในทฤษฎีบททั้งสองทฤษฎีบทข้างต้น จะได้เอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยม

$$T(2n+1) = 3T(n) + T(n+1)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ทฤษฎีบทที่ 3.2.8. $n^2T(k-1,l) + kT(n,l) = T(nk,l) - n^2(k-1)(l-1)$ *สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก* n, k *และ* l

บทพิสูจน์. ให้ n, k และ l เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&n^2T(k-1,l) + kT(n,l) \\
&\qquad = n^2\left(k-1+\frac{(k-1)(k-2)l}{2}\right) + k\left(n+\frac{n(n-1)l}{2}\right) \\
&\qquad = n^2\left(\frac{2k-2+k^2l-3kl+2l}{2}\right) + k\left(\frac{2n+n^2l-nl}{2}\right) \\
&\qquad = \frac{2n^2k-2n^2+n^2k^2l-3n^2kl+2n^2l+2nk+n^2kl-nkl}{2} \\
&\qquad = \frac{2nk+n^2k^2l-nkl-2n^2kl+2n^2k+2n^2l-2n^2}{2} \\
&\qquad = \frac{2nk+n^2k^2l-nkl}{2} - n^2kl + n^2k + n^2l - n^2 \\
&\qquad = nk + \frac{nk(nk-1)l}{2} - n^2(k-1)(l-1) \\
&\qquad = T(nk,l) - n^2(k-1)(l-1)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$n^2T(k-1,l)+kT(n,l)=T(nk,l)-n^2(k-1)(l-1)$$

ตามต้องการ □

สำหรับ $l=1$ จะได้เอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยม

$$n^2T(k-1)+kT(n)=T(nk)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และ k

ตัวอย่างของผลลัพธ์ในทฤษฎีบทที่ 3.2.8 ได้แสดงไว้ในตารางต่อไปนี้

n	k	l	$T(k-1,l)$	$T(n,l)$	$n^2T(k-1,l)+kT(n,l)$	$T(nk,l)$ $-n^2(k-1)(l-1)$
2	2	2	1	4	12	12
2	3	2	4	4	28	28
3	4	3	12	12	156	156
2	3	4	6	6	42	42

ทฤษฎีบทที่ 3.2.9. $n^2T(k-1,l)+kT(n-1,l)=T(nk-1,l)-(n^2-1)(k-1)(l-1)$ *สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n, k และ l*

บทพิสูจน์. ให้ n, k และ l เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
n^2T(k-1,l)+kT(n-1,l) &= n^2\left(k-1+\frac{(k-1)(k-2)l}{2}\right)+k\left(n-1+\frac{(n-1)(n-2)l}{2}\right)\\
&= \frac{2n^2k-2n^2+n^2k^2l-3n^2kl+2n^2l+2nk-2k+n^2kl-3nkl+2kl}{2}\\
&= \frac{2nk-2+n^2k^2l-3nkl+2l-2n^2kl+2n^2l+2kl-2l+2n^k-2n^2-2k+2}{2}\\
&= \frac{2nk-2+n^2k^2l-3nkl+2l}{2}-(n^2kl-n^2l-kl+l-n^2k+n^2+k-1)\\
&= (nk-1)+\frac{(nk-1)(nk-2)l}{2}-(n^2-1)(k-1)(l-1)\\
&= T(nk-1,l)-(n^2-1)(k-1)(l-1)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$n^2T(k-1,l)+kT(n-1,l)=T(nk-1,l)-(n^2-1)(k-1)(l-1)$$

ตามต้องการ □

สำหรับ $l=1$ ในทฤษฎีบทที่ 3.2.9 จะได้เอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยม

$$n^2T(k-1)+kT(n-1)=T(nk-1)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก k และ n

ตัวอย่างของผลลัพธ์ในทฤษฎีบทที่ 3.2.9 แสดงไว้ในตารางต่อไปนี้

n	k	l	$n^2T(k-1,l)+kT(n-1,l)$	$T(nk-1,l)-(n^2-1)(k-1)(l-1)$
2	2	2	6	6
2	3	2	19	19
3	4	3	128	128
2	3	4	27	27

3.3 เอกลักษณ์เชิงยกกำลังสอง

ในหัวข้อนี้นี้จะกล่าวถึงเอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วในพจน์ยกกำลังสอง ซึ่งเป็นนัยทั่วไปของเอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.3.1. $T(n+1,l)^2-T(n,l)^2=(n+1)^3+(l-1)n\left((l+1)n^2+3n+1\right)$ *สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก l และ n*

บทพิสูจน์. ให้ l และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&T(n+1,l)^2 - T(n,l)^2 \\
&\qquad = \left((n+1) + \frac{(n+1)nl}{2}\right)^2 - \left(n + \frac{n(n-1)l}{2}\right)^2 \\
&\qquad = \frac{4n^2 + 8n + 4n^3l + 8n^2l + 4n + 4 + 4nl + n^4l^2 + 2n^3l^2 + n^2l^2}{4} \\
&\qquad\quad - \frac{4n^2 + 4n^3l - 4n^2l + n^4l^2 - 2n^3l^2 + n^2l^2}{4} \\
&\qquad = \frac{8n + 12n^2l + 4 + 4nl + 4n^3l^2}{4} \\
&\qquad = 2n + 3n^2l + 1 + nl + n^3l^2 \\
&\qquad = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (nl - n)(n^2l + n^2 + 3n + 1) \\
&\qquad = (n+1)^3 + (l-1)n((l+1)n^2 + 3n + 1)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$T(n+1,l)^2 - T(n,l)^2 = (n+1)^3 + (l-1)n\left((l+1)n^2 + 3n + 1\right)$$

ตามต้องการ □

สำหรับ $l = 1$ จะได้เอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยม

$$T(n+1)^2 - T(n)^2 = (n+1)^3$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ใน [5, สมการ (1.5)]

ทฤษฎีบทที่ 3.3.2. $T(n,l)^2 + T(n-1,l)^2 = lT(n^2,l) - (2n^2 - 2n + 1)(2T(l,n-1) - (l+1))$ *สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก* n *และ* l

บทพิสูจน์. ให้ n และ l เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&T(n,l)^2 + T(n-1,l)^2 \\
&\quad = \left(n + \frac{n(n-1)l}{2}\right)^2 + \left(n - 1 + \frac{(n-1)(n-2)l}{2}\right)^2 \\
&\quad = \left(\frac{2n + n^2l - nl}{2}\right)^2 + \left(\frac{2n - 2 + n^2l - 3nl + 2l}{2}\right)^2 \\
&\quad = \frac{8n^2 + 8n^3l - 20n^2l + 2n^4l^2 - 8n^3l^2 + 14n^2l^2 + 20nl - 8n + 4 - 8l - 12nl^2 + 4l^2}{4} \\
&\quad = \frac{4n^2 + 4n^3l - 10n^2l + n^4l^2 - 4n^3l^2 + 7n^2l^2 + 10nl - 4n + 2 - 4l - 6nl^2 + 2l^2}{2} \\
&\quad = \left(\frac{2n^2l + n^4l^2 - n^2l^2}{2}\right) - (2n^2 - 2n + 1)\left(\frac{4l + 2nl^2 - 2l^2 - 2nl + 2l - 2l - 2}{2}\right) \\
&\quad = l\left(n^2 + \frac{n^2(n^2-1)l}{2}\right) - (2n^2 - 2n + 1)\left(2(l + \frac{l(l-1)(n-1)}{2}) - l - 1\right) \\
&\quad = lT(n^2,l) - (2n^2 - 2n + 1)(2T(l,n-1) - (l+1))
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$T(n,l)^2 + T(n-1,l)^2 = lT(n^2,l) - (2n^2-2n+1)(2T(l,n-1)-(l+1))$$

ตามต้องการ $\square$

สำหรับ $l = 1$ จะได้เอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยม

$$T(n)^2 + T(n-1)^2 = T(n^2)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ใน [4, สมการ (19a)]

ทฤษฎีบทที่ 3.3.3. $(T(n+1,l)-T(n,l))^2 = l(T(n+1,l)+T(n,l))-(l-1)$ *สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และ l*

บทพิสูจน์. ให้ n และ l เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&(T(n+1,l)-T(n,l))^2 + l - 1 \\
&\quad = \left(n+1+\frac{(n+1)(n)l}{2} - n - \frac{n(n-1)l}{2}\right)^2 + l - 1 \\
&\quad = \left(\frac{2n+2+n^2l+nl-2n-n^2l+nl}{2}\right)^2 + l - 1 \\
&\quad = \left(\frac{2+2nl}{2}\right)^2 + l - 1 \\
&\quad = \frac{4+8nl+4n^2l^2}{4} + l - 1 \\
&\quad = \frac{4+8nl+4n^2l^2+4l-4}{4} \\
&\quad = \frac{4n^2l^2+8nl+4l}{4} \\
&\quad = l\left(\frac{4n^2l+8n+4}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= l\left(\frac{2n^2l+4n+2}{2}\right)\\
&= l\left(\frac{2n+2+n^2l+nl+2n+n^2l-nl}{2}\right)\\
&= l\left(\frac{2n+2+n^2l+nl}{2}\right)+l\left(\frac{2n+n^2l-nl}{2}\right)\\
&= l\left(n+1+\frac{(n+1)(n)l}{2}\right)+l\left(n+\frac{n(n-1)l}{2}\right)\\
&= lT(n+1,l)+lT(n,l)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $(T(n+1,l)-T(n,l))^2 = l(T(n+1,l)+T(n,l))-(l-1)$ □

สำหรับ $l=1$ จะได้เอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยม

$$T(n+1)+T(n) = (T(n+1)-T(n))^2 = (n+1)^2$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ทฤษฎีบทที่ 3.3.4. *$T(n+1,l)+T(n,l+1) = n^2l+T(n+1)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และ l*

บทพิสูจน์. ให้ n และ l เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
T(n+1,l)+T(n,l+1) &= (n+1)+\frac{(n+1)(n)l}{2}+n+\frac{n(n-1)(l+1)}{2}\\
&= \frac{2n+2+n^2l+nl}{2}+\frac{2n+n^2l+n^2-nl-n}{2}\\
&= \frac{2n^2l+3n3n^2+2}{2}\\
&= n^2l+\frac{(n+1)(n+2)}{2}\\
&= n^2l+T(n+1)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $T(n+1,l)+T(n,l+1) = n^2l+T(n+1)$ □

ตัวอย่างของผลลัพธ์ในทฤษฎีบทที่ 3.3.4 ได้แสดงไว้ในตารางต่อไปนี้

n	l	$T(n+1,l)$	$T(n,l+1)$	$T(n+1,l)+T(n,l+1)$	$n^2l+T(n+1)$
2	2	9	5	14	14
3	2	16	12	28	28
3	3	22	15	37	37
4	3	35	28	63	63

บทที่ 4

บทสรุป

ในวิทยานิพนธ์นี้ ได้ศึกษาจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งเป็นนัยทั่วไปของจำนวนสามเหลี่ยมและได้นำเสนอผลวิจัยใน 2 ประเด็นหลัก คือ

1) การให้ลักษณะเฉพาะของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วพร้อมด้วยการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วและจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ในบทที่ 2 ลักษณะเฉพาะดังกล่าวเป็นนัยทั่วไปของลักษณะเฉพาะของจำนวนสามเหลี่ยม

2) การพิสูจน์เอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ในบทที่ 3 ได้นำเสนอเอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่น่าสนใจไว้หลายเอกลักษณ์ เอกลักษณ์ดังกล่าวสามารถใช้อธิบายเอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมซึ่งเป็นกรณีเฉพาะได้ด้วย

การขยายเอกลักษณ์รูปแบบอื่น ๆ ของจำนวนสามเหลี่ยมสู่เอกลักษณ์ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วเป็นปัญหาวิจัยที่น่าสนใจ

รายการอ้างอิง

[1] P. J. Berana, J. Montalbo, D. Magpantay, On triangular and trapezoidal numbers, Asia Pacific Journal of Multidisciplinary Research, 3, 76--81, 2015.

[2] E. Deza, M. M. Deza, Figurate Numbers, Singapore: World Scientific Publishing Company, 2012.

[3] A. S. Garge, S. A. Shirali, Triangular numbers, Resonance, 17, 672--81, 2012.

[4] H. Hindin, Stars, hexes, triangular numbers and Pythagorean triples, Journal of Recreational Mathematics, 16, 191--193, 1983-1984.

[5] V. E. Hoggatt Jr., M. Bicknell, Triangular numbers, The Fibonacci Quarterly, 12, 221--230, 1974.

[6] S. Jitman, K. Awachai, P. Tanla: Isosceles triangular numbers, MJ-MATh 62, 39--49, 2017.

[7] S. Jitman, C. Phongthai, On the characterization and enumeration of some generalized trapezoidal numbers, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2017, ID 4515249, 2017.

[8] W. L. McDaniel, Triangular numbers in the Pell sequence, The Fibonacci Quarterly, 34, 105--107, 1996.

[9] J. L. Pietempol, Square triangular numbers, The American Mathematical Monthly, 169, 168--169, 1962.

[10] N. J. A. Sloane, et al, On-line encyclopedia of integer sequences, http://oeis.org/

[11] T. J. Trotter, Some identities for the triangular numbers, Journal of Recreational Mathematics, 6, 128--135, 1973.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	จิรเมธ พันธ์พิมพ์
วัน เดือน ปี เกิด	29 สิงหาคม 2538
สถานที่เกิด	กรุงเทพมหานคร
วุฒิการศึกษา	2557-2561 ปริญญาตรี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม
	2561-2564 ปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร
ที่อยู่ปัจจุบัน	42-43 หมู่ 1 ตำบลอาจสามารถ อำเภออาจสามารถ จังหวัดร้อยเอ็ด 45160