สภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์สำหรับดินชั้นล่างที่เป็นสื่อกระแสไฟฟ้าแบบนูนถูกฝังใต้ดินชั้นบน

โดย

นางสาวมธุลดา อยู่โพชนา

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์
มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2565

สภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์สำหรับดินชั้นล่างที่เป็นสื่อกระแสไฟฟ้าแบบนูนถูกฝังใต้ดินชั้นบน

โดย
นางสาวมธุลดา อยู่โพชนา

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์
มหาวิทยาลัยศิลปากร
ปีการศึกษา 2565

NORMALIZED APPARENT CONDUCTIVITY FOR A CONDUCTIVE BULGE HOST BENEATH AN OVERBURDEN LAYER

By

MISS Matulada YOUPOCHANA

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for Master of Science (MATHEMATICS)

Department of MATHEMATICS

Silpakorn University

Academic Year 2022

หัวข้อ	สภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์สำหรับดินชั้นล่างที่เป็นสื่อกระแสไฟฟ้าแบบนูนถูกฝังใต้ดินชั้นบน
โดย	นางสาวมธุลดา อยู่โพชนา
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก	รองศาสตราจารย์ ดร. สืบสกุล อยู่ยืนยง

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

....คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นรงค์ ฉิมพาลี)

พิจารณาเห็นชอบโดย

....ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. มาลินี ชัยยะ)

....อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก

(รองศาสตราจารย์ ดร. สืบสกุล อยู่ยืนยง)

....ผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วรินทร์ ศรีปัญญา)

61305206 : คณิตศาสตร์ แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
คำสำคัญ : การแปลงฮันเกล, สภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์, วิธีสภาพต้านทานไฟฟ้ากระแสตรง

นางสาว มธุลดา อยู่โพชนา: สภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์สำหรับดินชั้นล่างที่เป็นสื่อกระแสไฟฟ้าแบบนูนถูกฝังใต้ดินชั้นบน อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : รองศาสตราจารย์ ดร. สืบสกุล อยู่ยืนยง

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยมีวัตถุประสงค์หลักคือการสำรวจสภาพนำไฟฟ้าของโครงสร้างพื้นดิน โดยที่แบบจำลองที่จะทำการศึกษาเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อพิจารณาสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ ด้วยการปล่อยไฟฟ้ากระแสตรงลงสู่ดิน ผ่านขั้วไฟฟ้าที่จัดวางขั้วไฟฟ้าแบบเวนเนอร์ ในการวิเคราะห์หาผลเฉลยของสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ได้จากการคำนวณโดยการปล่อยไฟฟ้ากระแสตรงลงสู่พื้นดินที่มีโครงสร้างสองชั้น การแปลงฮันเกลได้ถูกนำมาใช้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ผลเฉลยที่ได้อยู่ในรูปฟังก์ชันศักย์ไฟฟ้า อีกทั้งการคำนวณหาสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ใช้วิธีการกำหนดค่าตามสูตรของเวนเนอร์ ในการคำนวณหาคำตอบเชิงตัวเลขของค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์มีการกำหนดค่าของพารามิเตอร์บางค่าในสมการ จากนั้นมีการนำคำตอบที่คำนวณได้มาวาดกราฟเพื่ออธิบายพฤติกรรมของค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์เมื่อแปรค่าระยะห่างระหว่างขั้วไฟฟ้า ผลของการทดลองเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นชัดว่ารูปร่างกราฟของค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์เมื่อแปรค่าระยะห่างระหว่างขั้วไฟฟ้า ใช้สำหรับพยากรณ์สภาพนำไฟฟ้าของโครงสร้างใต้ดินได้

61305206 : Major (MATHEMATICS)
Keyword : HANKEL TRANSFORMS, NORMALIZED APPARENT CONDUCTIVITY, DIRECT CURRENT RESISTIVITY METHODS

MISS Matulada YOUPOCHANA : Normalized Apparent Conductivity for a Conductive Bulge Host Beneath an Overburden Layer Thesis advisor : Associate Professor Dr. Suabsagun Yooyuanyong

Mathematical models are presented in this thesis. The main objective is to determine the electrical conductivity of the ground structure. In our mathematical model, the normalized apparent conductivity will be considered by discharging direct current into the ground with the use of Wenner array configuration. To investigate the solution, the normalized apparent conductivity is determined from the direct current discharge to the ground with two-layers earth structure. The Hankel transform has been used to solve partial differential equations. The solution takes the form of the electric potential function. Furthermore, Wenner's formula was used to obtain the normalized apparent conductivity. Several parameter values are given in the equation to determine the numerical solution of normalized apparent conductivity. The numerical results are plotted via electrode spacing to show their behavior. The numerical results clearly indicate that the normalized apparent conductivity, while the electrode spacing is varied, can be used to predict the conductivity of underground structures.

กิตติกรรมประกาศ

สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้เพราะความกรุณาของรองศาสตราจารย์ ดร. สืบสกุล อยู่ยืนยง ที่ให้คำปรึกษา คำแนะนำ และความใส่ใจแก่ผู้จัดทำ ทำให้ผู้จัดทำได้เข้าใจวิธีการศึกษางานวิจัยทางคณิตศาสตร์ประยุกต์เพิ่มมากยิ่งขึ้น อีกทั้งยังช่วยให้คำแนะนำในการแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ จนกระทั่งทำให้วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จได้

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากรทุก ๆ ท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชา ขอขอบคุณเพื่อน ๆ รุ่นพี่ และรุ่นน้องในคณะวิทยาศาสตร์และภาควิชาคณิตศาสตร์ สำหรับคำแนะนำ และกำลังใจที่ให้กันตลอดมา

สุดท้ายนี้ ขอกราบขอบพระคุณ ครอบครัว ที่ให้การสนับสนุนการศึกษาและกำลังใจเสมอมา จนมีความสำเร็จในครั้งนี้

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

ทรัพยากรธรรมชาติใต้พื้นดินมีคุณค่าและมีประโยชน์ต่อมนุษย์อย่างมาก ทรัพยากรธรรมชาติส่วนใหญ่ที่ฝังอยู่ใต้ผิวโลกจึงมีความยากแก่การสำรวจ ดังนั้นจึงได้มีนักวิทยาศาสตร์ที่ใช้หลักการของคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ในการสำรวจแร่ใต้พื้นผิวโลกเรียกว่าธรณีคณิตศาสตร์ (Geomathematics) เป้าหมายหลักของการศึกษาวิชาแขนงนี้เกี่ยวข้องกับการวัดที่ในตำแหน่งใกล้พื้นผิวโลกซึ่งได้รับอิทธิพลจากการกระจายคุณสมบัติทางกายภาพภายใน ในช่วงไม่กี่ทศวรรษที่ผ่านมามีวิธีการศึกษาหลายอย่างที่ใช้ในการสำรวจทรัพยากรใต้พื้นโลก เช่น วิธีแรงโน้มถ่วง วิธีสนามแม่เหล็ก วิธีคลื่นไหวสะเทือน วิธีสนามไฟฟ้า วิธีสนามแม่เหล็กไฟฟ้า วิธีกัมมันตภาพรังสี เป็นต้น

ปัจจุบันเป็นที่ทราบกันอย่างดีว่า ลักษณะบางประการทางภูมิศาสตร์ เช่น ชั้นหินคดโค้งของหินทั้งปะทุนหงายและคว่ำ (syncline and anticline) รอยเลื่อนทางธรณีวิทยา โดมเกลือเนื้อแร่ คราบดินเหนียว เหล่านี้ บ่อยครั้งที่จะกลายเป็นปัญหาหลักในขั้นตอนการสำรวจหลายประเภท อาทิเช่น การหาแหล่งปิโตรเลียม การหาที่ตั้งของชั้นน้ำบาดาล และการสำรวจแร่ ตลอดจนถึง การก่อสร้างทางหลวง หรือ การโยธาวิศวกรรม เป็นต้น ในหลายกรณีดังกล่าวพบว่าการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์และฟิสิกส์ ควบคู่กับ ข้อมูลทางธรณีวิทยา เป็นเพียงหนทางที่จะบรรลุถึงการแก้ปัญหาดังกล่าวได้

ธรณีคณิตศาสตร์ (Geomathematics) ได้ถูกนำมาใช้ อย่างแพร่หลายในด้านสิ่งแวดล้อม ตัวอย่างเช่น การสำรวจน้ำใต้ดิน และการทำแผนที่ของโครงสร้างที่ถูกฝังจะสามารถช่วยให้ค้นหาขอบเขตของการขุดค้นได้เหมาะสมยิ่งขึ้น การตรวจจับชั้นโพรงใต้ดิน ตรวจหาความเสี่ยงการรั่วไหลของเรดอน ตรวจสอบเพื่อทำแผนที่การไหลของน้ำใต้ดิน การแบ่งโซนของน้ำเน่าเสียในดิน-หินในบริเวณที่ทิ้งขยะ การตรวจจับการแตกหักที่อาจจะเกิดอันตรายหรือบริเวณที่

มวลหินมีความอ่อนแอ เป็นต้น

การประยุกต์ใช้ Geomathematics ในการค้นหาสำรวจแหล่งแร่ น้ำมัน หรือ แก๊สธรรมชาติ จะสามารถแบ่งประเภทได้ตามวิธีการขั้นตอนในการสำรวจ เช่น วิธีแรงโน้มถ่วง วิธีสนามแม่เหล็ก วิธีคลื่นไหวสะเทือน วิธีสนามไฟฟ้า วิธีสนามแม่เหล็กไฟฟ้า วิธีกัมมันตภาพรังสี

ในวิทยานิพนธ์นี้ ผู้วิจัยจะศึกษาเฉพาะเรื่องของการสำรวจด้วยกระแสไฟฟ้า ที่เรียกว่า การสำรวจวัดสภาพต้านทานไฟฟ้า (Resistivity survey)

1.1 การสำรวจวัดสภาพต้านทานไฟฟ้า (Resistivity Survey)

การสำรวจวัดสภาพต้านทานไฟฟ้า (Resistivity survey) หรืออีกชื่อหนึ่งที่นิยมเรียก คือ การสำรวจวัดค่าความต้านทานไฟฟ้าจำเพาะ การประยุกต์สำรวจธรณีวิทยาใต้ผิวดินด้วยวิธีวัดสภาพต้านทานไฟฟ้า ต้องอาศัยเงื่อนไข สภาพใต้ผิวดินต้องไม่เป็นฉนวนไฟฟ้า เนื่องจากโดยทั่วไปเป็นที่ทราบกันดีว่าแร่ประกอบหินในชั้นเปลือกโลกมีลักษณะเป็นฉนวนไฟฟ้า แต่เนื่องจากเนื้อหินมีช่องว่างประกอบไปด้วยน้ำ ทำให้มีไอออนหรือประจุไฟฟ้าต่าง ๆ ปะปนอยู่ ไอออนเหล่านี้จะทำให้กระแสไฟฟ้าไหลใต้ผิวดิน ช่องว่างที่เกิดจาก รูพรุนในเนื้อหินในชั้นเปลือกโลกลึกลงไปประมาณ 10-15 กิโลเมตร จะปิดลงเพราะอยู่ในสภาพการกดอัดจากน้ำหนักที่อยู่ด้านบน ประกอบกับอุณหภูมิที่เพิ่มสูงขึ้นตามความลึกช่องว่างในเนื้อหินจึงลดลง ทำให้ช่องว่างและของเหลวในช่องว่างหายไป สภาพการนำไฟฟ้าของหินใต้ผิวดินหมดไป ดังนั้นหากสภาพใต้ผิวดินลึกกว่า 10-15 กิโลเมตรลงไปมีช่องว่างและมีของเหลวแทรกอยู่ในช่องว่างจะสามารถสำรวจวัดสภาพต้านทานไฟฟ้าได้ โดยทั่วไปการสำรวจวัดสภาพต้านทานไฟฟ้าทำได้รวดเร็ว ทั้งนี้เพราะปัจจัยที่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของค่าสภาพต้านทานไฟฟ้านั้น มีมากกว่าการสำรวจด้วยวิธีวัดค่าความเร่งโน้มถ่วง หรือค่าสนามแม่เหล็ก

วิธีการสำรวจวัดสภาพต้านทานไฟฟ้าจัดรวมอยู่ในประเภทการสำรวจโดยไฟฟ้าที่ประยุกต์เอาหลักทฤษฎีทางไฟฟ้ามาตรวจวัด โดยทั่วไปสภาพธรณีวิทยาการสำรวจนี้แบ่งออกได้เป็นสองกลุ่มใหญ่ๆ กลุ่มแรกเป็นกลุ่มที่ต้องปล่อยไฟฟ้ากระแสตรงลงสู่ผิวดิน และกลุ่มที่สองคือกลุ่มที่ไม่ต้องปล่อยกระแสไฟฟ้าลงสู่ดิน แต่ใช้สนามแม่เหล็กไฟฟ้า วิธีการสำรวจด้วยวิธีสภาพต้านทานไฟฟ้า จัดอยู่ในกลุ่มที่ต้องปล่อยกระแสลงสู่ดิน โดยการสำรวจด้วยวิธีวัดสภาพต้านทานไฟฟ้า เป็นการวัดค่าความต่างศักย์ที่เกิดจากการปล่อยไฟฟ้ากระแสตรงลงไปในดิน

(Direct current) สิ่งที่มีผลต่อค่าการเปลี่ยนแปลงของความต่างศักย์และทางเดินของกระแสไฟฟ้า คือ คุณสมบัติทางกายภาพของดินที่ประกอบด้วยแร่ และองค์ประกอบในเนื้อดิน-หินรูพรุน ของเหลวในรูพรุน หรือองค์ประกอบอื่น ๆ วิธีการสำรวจนี้นิยมทำกันอย่างแพร่หลายมากกว่าวิธีอื่น ๆ ในประเภทของการสำรวจด้วยไฟฟ้า

วัตถุประสงค์ของการสำรวจวัดสภาพต้านทานไฟฟ้า เพื่อหาสภาพธรณีวิทยาใต้ผิวดินเช่นเดียวกับวิธีการสำรวจธรณีฟิสิกส์อื่นๆ เป้าหมายหลักจึงเป็นการศึกษาเพื่อทราบสภาพธรณีวิทยาใต้ผิวดิน ซึ่งการสำรวจวัดสภาพต้านทานไฟฟ้าจะอาศัยคุณสมบัติเฉพาะตัวทางไฟฟ้าของสภาพดินหรือหินใต้ผิวดิน ดังนั้นหากสภาพใต้ผิวดินไม่มีความแตกต่างทางกายภาพในด้านไฟฟ้า การสำรวจนี้จะไม่สามารถนำมาประยุกต์ใช้งานได้ ตัวอย่างของสภาพธรณีวิทยาที่เหมาะสมสำหรับการประยุกต์ใช้การสำรวจด้วยวิธีสภาพต้านทานไฟฟ้า ได้แก่ ใช้หาชั้นน้ำบาดาล ใช้หาขอบเขตของการแทรกตัวของชั้นน้ำเค็ม ใช้หาองค์ประกอบของแร่ที่แทรกอยู่ในดินหรือหิน ใช้หาโพลงใต้ผิวดิน ใช้ตรวจสภาพการเปลี่ยนแปลงระดับน้ำใต้ผิวดินเป็นต้น ซึ่งในประเทศไทยเอง วิธีการสำรวจวัดสภาพต้านทานไฟฟ้ามีการนำมาประยุกต์ใช้กว่า 40 ปี โดยส่วนใหญ่จะเป็นการประยุกต์ใช้งานเพื่อสำรวจหาชั้นน้ำบาดาล

1.2 วิธีสภาพต้านทานไฟฟ้ากระแสตรง (Direct Current Resistivity Methods) และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

วิธีการสำรวจหาแร่ด้วยไฟฟ้าเป็นวิธีสำรวจแร่ใต้ผิวดินซึ่งวิธีนี้จะส่งกระแสไฟฟ้าให้ไหลผ่านไปใต้พื้นดิน โดยใช้วิธีทางไฟฟ้าเราอาจวัดค่าความศักย์ กระแสไฟฟ้า และสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นตามธรรมชาติหรือถูกนำเข้าสู่พื้นดิน ข้อมูลจากการวัด (measurements data) สามารถทำได้หลายวิธีเพื่อกำหนดผลลัพธ์ที่หลากหลาย มีเทคนิคทางไฟฟ้าและแม่เหล็กไฟฟ้าที่หลากหลายกว่าวิธีการสำรวจแบบอื่นๆ [19]

การสำรวจวัดสภาพต้านทานไฟฟ้านั้นไม่ได้เกิดขึ้นมาอย่างทันทีทันใด แต่พัฒนาหรือมีการคิดต่อยอดจากการสำรวจด้วยไฟฟ้าวิธีอื่น ๆ ตามลำดับดังนี้ การสำรวจทางไฟฟ้ามีการประยุกต์เริ่มแรก และแสดงให้เห็นว่าสามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้จริงโดยเริ่มขึ้น ในปี ค.ศ.1830 โรเบิร์ต ฟอซ์ก และ เดวีส์ กิลเบิร์ต (Robert Fox and Davies Gilbert, [10]) ได้ใช้อิเล็กโทรดทองแดงและกัลวาโนมิเตอร์ (galvanometer) เพื่อใช้สำรวจหาแหล่งแร่ทองแดงที่อยู่ในประเทศอังกฤษ ต่อมาในช่วง ค.ศ.1900 ณ ประเทศฝรั่งเศส คอนแรด ชรัม

เบอร์แจร์ (Conrad Schlumberger, [2]) และที่ประเทศอเมริกามี แฟงค์ เวนเนอร์ (Frank Wenner, [20]) ได้ทดลองปล่อยกระแสไฟฟ้าลงไปในดินและวัดค่าความต่างศักย์ไฟฟ้าเพื่อหาค่าสภาพต้านทานไฟฟ้าตามกฎของโอห์ม โดยที่กฎของโอห์มได้ค้นพบประมาณ ค.ศ.1827 จึงเป็นที่มาของการสำรวจวัดสภาพต้านทานไฟฟ้า และต่อมาชื่อของ ชรัมเบอร์แจร์ และ เวนเนอร์ (Schlumberger and Wenner) เป็นที่รู้จักในชื่อของรูปแบบการวางขั้วไฟฟ้าเพื่อการสำรวจวัดสภาพต้านทานไฟฟ้า ต่อมาในช่วงปี ค.ศ.1920 กรีช (O. H. Gish) และ รูเนย์ (W. J. Rooney) [11] ชาวอเมริกา เสนอวิธีการสำรวจโดยใช้กระแสเทลลูริก ซึ่งต่อยอดจากการพบกระแสเทลลูริกและสนามไฟฟ้าจากกระแสเทลลูริก เริ่มต้นโดย ปีเตอร์ บาร์โลว์ (Peter Barlow) ในช่วง ค.ศ.1847

จากที่กล่าวมาข้างต้นนี้จะเห็นว่า มีนักวิจัยมากมายได้ใช้วิธีวัดสภาพต้านทานไฟฟ้าเพื่อวัตถุประสงค์ต่าง ๆ มากมายและมีการพัฒนาต่อยอดเป็นช่วงเวลามากกว่าหลายทศวรรษ ทางผู้วิจัยจึงขอกล่าวถึงงานวิจัยในอดีต ที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อของการศึกษาวิธีสภาพต้านทานไฟฟ้า โดยเฉพาะการศึกษาบนพื้นโลกที่แบ่งออกเป็นชั้น ๆ และสภาพนำไฟฟ้าในดินเปลี่ยนแปลงไปตามความลึกของโลก เอ็ดเวิร์ดและนาบิกไฮอึน (Edwards and Nabighian, [9]) ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อศึกษาโครงสร้างของพื้นโลกที่แบ่งออกเป็น n ชั้นโดยที่รอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะเป็นระนาบขนานกับพื้นผิวโลก และในแต่ละชั้นมีสภาพนำไฟฟ้าเป็นค่าคงตัวและมีความลึกจำกัดยกเว้นชั้นล่างสุดซึ่งจะมีความลึกเป็นอนันต์ โดยนักวิจัยชุดนี้สามารถคำนวณหาค่าประมาณของอัตราส่วนระหว่างสนามแม่เหล็กในชั้นบนและชั้นล่างของชั้นที่อยู่ติดกันได้ อย่างไรก็ตาม งานวิจัยชิ้นนี้ไม่สามารถนำมาใช้ในการค้นหาแหล่งทรัพยากรธรรมชาติที่ฝังอยู่ใต้พื้นโลกได้ จนกระทั่งเฉินและโอเด็นเบิร์ก (Chen and Oldenburg, [8]) ได้ศึกษาค้นคว้างานวิจัยทำให้สามารถสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งนำไปประยุกต์ใช้ในการค้นหาแหล่งทรัพยากรธรรมชาติใต้พื้นโลกได้สำเร็จ โดยการคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้าจากการแก้ปัญหาค่าขอบเขต สตอยเลอร์ และ เวท (Stoyer and Wait, [18]) ได้เป็นนักวิจัยกลุ่มแรกที่ศึกษาปัญหาของการคำนวณค่าความสภาพนำไฟฟ้าสำหรับโครงสร้างโลกแบบวิวิธพันธ์ ซึ่งค่าสภาพนำไฟฟ้านั้นแปรผันแบบทวีคูณตามความลึก คิมและลี (Kim and Lee [14]) บานุจี และคณะ (Banerjee et al. [3, 4]) ได้พิจารณาปัญหาค่าสภาพต้านทานของโลกหลายชั้น อีกทั้ง ยังได้ผลลัพธ์ในกรณีเฉพาะสำหรับโลกที่แบ่งออกเป็นสองชั้น ซึ่งสมมติว่าโลกมีการเปลี่ยนแปลงค่าสภาพนำไฟฟ้าแบบเลขชี้กำลัง ภาสกร เกตุชาญวิทย์ [13] ได้ศึกษาโครงสร้างใต้พื้นผิวโลกโดยการใช้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าแบบชั่วคราว การศึกษานี้สนใจปริมาณสนามแม่เหล็กไฟฟ้ามีการลดลงแบบเอกซ์โปเนนเชียล เมื่อเวลาผ่านไป ธีรศักดิ์

ฉลาดการ และ สืบสกุล อยู่ยืนยง (Chaladgran and Yooyuanyong, [6]) ได้นำเสนอผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของค่าสภาพต้านทานปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ เมื่อค่าสภาพนำไฟฟ้าของดินชั้นบนถูกกำหนดโดยฟังก์ชันเลขชี้กำลัง และค่าสภาพนำไฟฟ้าของดินชั้นล่างถูกกำหนดโดยค่าคงตัว

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยจะสำรวจสภาพนำไฟฟ้าของโครงสร้างพื้นดิน โดยแบบจำลองที่ทำการศึกษาเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อพิจารณาสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ ด้วยการปล่อยไฟฟ้ากระแสตรงลงสู่ดิน ผ่านขั้วไฟฟ้า การวิเคราห์หาคำตอบของสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ คำนวณจากการปล่อยไฟฟ้ากระแสตรงลงสู่พื้นดินที่มีโครงสร้างสองชั้น การแปลงฮันเกลถูกนำมาใช้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งจะได้คำตอบอยู่ในรูปฟังก์ชันศักย์ไฟฟ้า อีกทั้งการคำนวณหาสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ใช้วิธีการกำหนดค่าตาม สูตรของเวนเนอร์ ในการคำนวณหาคำตอบเชิงตัวเลขของค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์มีการกำหนดค่าของพารามิเตอร์บางค่าในสมการ นอกจากนั้นจะนำคำตอบที่คำนวณได้มาวาดกราฟเพื่ออธิบายพฤติกรรมของค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์

บทที่ 2

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

วิธีสภาพต้านทานไฟฟ้า ได้ถูกนำเสนอเพื่อใช้ในการศึกษา โครงสร้างใต้พื้นผิวโลก โดยอาศัยการวัดความต่างศักย์ไฟฟ้า ณ จุดที่ปักขั้วไฟฟ้าและและบริเวณใกล้เคียงกับการไหลของกระแส ในการศึกษานี้จะอิงวิธีการสำรวจข้างต้นควบคู่กับการศึกษาเกี่ยวกับแบบจำลองสภาพนำไฟฟ้าของโลก 2 ชั้น ซึ่งคล้ายคลึงกับงานวิจัยของเฉินและโอเด็นเบิร์ก [8] แต่ในการศึกษานี้จะแตกต่างในฟังก์ชันของสภาพนำไฟฟ้า โดยกำหนดให้สภาพนำไฟฟ้าของดินชั้นบน (overburden) ถูกกำหนดโดยฟังก์ชันคงตัว

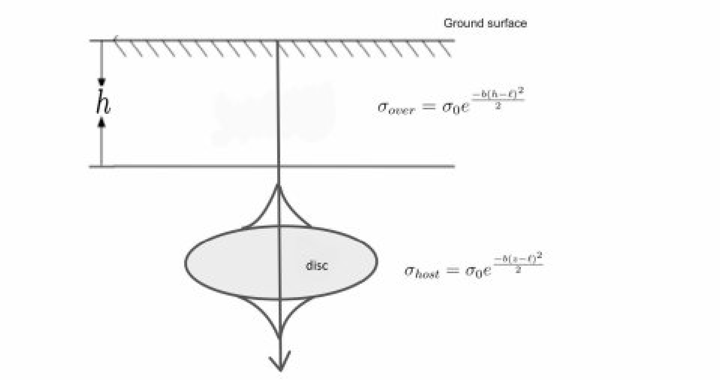
$$\sigma_{over} = \sigma_0 e^{\frac{-b(h-\ell)^2}{2}}$$

เมื่อ $\sigma_0 > 0$ และ b เป็นค่าคงตัวและ h เป็นความหนาของดินชั้นบน และ ℓ เป็นความลึกของแผ่นจาน

ในส่วนของดินชั้นล่าง (host) สภาพนำไฟฟ้าจะถูกกำหนดโดยฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

$$\sigma_{host} = \sigma_0 e^{\frac{-b(z-\ell)^2}{2}}$$

เมื่อ $z > h$ ดังในรูปที่ 2.1 อีกทั้งในงานวิจัยนี้ได้กำหนดการจัดวางขั้วไฟฟ้าแบบเวนเนอร์ (Wenner's Array) ซึ่งเป็นการตอกขั้วไฟฟ้า 4 ขั้วในแนวเส้นตรงเดียวกันและมีระยะห่างระหว่างขั้ว เท่า ๆ กัน a เมตร ดังในรูปที่ 3.1 โดยเป้าหมายของการศึกษานี้คือการศึกษาพฤติกรรมของค่าสภาพนำไฟฟ้าเมื่อกำหนดค่าพารามิเตอร์ให้



รูปที่ 2.1: แบบจำลองทางเรขาคณิต

2.1 ทฤษฎีพื้นฐาน

เมื่อปล่อยกระแสไฟฟ้าไหลลงสู่ดินทุกทิศทุกทาง แต่กระแสไฟฟ้าจะไม่ไหลสู่อากาศ เพราะอากาศมีค่าของสภาพต้านทานไฟฟ้าที่สูงมากๆ (ค่าอนันต์) ในกรณีไฟฟ้ากระแสตรง จะสามารถแสดงได้ว่าสนามไฟฟ้าสามารถเขียนได้ในรูปเกรเดียนของสเกลาร์ของฟังก์ชันศักย์ไฟฟ้า [18]

$$\vec{E} = -\nabla\psi$$

เมื่อ $\vec{E}$ แทนเวกเตอร์ความเข้มสนามไฟฟ้า (V/m) และ ∇ คือตัวดำเนินการเกรเดียน และ ψ แทนฟังก์ชันศักย์ไฟฟ้า

เนื่องจากไดเวอร์เจนต์ของความหนาแน่นกระแสไฟฟ้ามีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นจึงสามารถหาความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าโดยอาศัยกฎของโอห์ม (Ohm's law) ได้ว่า

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}$$

เมื่อ $\vec{J}$ คือ ความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้ามีหน่วยเป็นแอมแปร์ต่อตารางเมตร (A/m^2) และ σ คือ สภาพการนำไฟฟ้ามีหน่วยเป็นซีเมนต์ต่อเมตร (S/m)

จากทฤษฎีสนามแม่เหล็กไฟฟ้า สมการความต่อเนื่องของความหนาแน่นของประจุไฟฟ้าที่ไหลลงสู่ตัวกลางเอกพันธุ์ เขียนได้ดังนี้

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

หรือ

$$\nabla \cdot (\sigma \vec{E}) = 0$$

นั่นคือ

$$\nabla \cdot \sigma(-\nabla \psi) = 0$$

อาศัยคุณสมบัติทางการวิเคราะห์เวคเตอร์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \sigma(-\nabla \psi) &= -\Big[\sigma \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\psi\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\psi\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\psi\vec{k}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}\psi\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\psi\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\psi\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\sigma\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma\vec{k}\right)\Big] \\
&= -(\sigma\nabla \cdot \nabla\psi + (\nabla\psi) \cdot (\nabla\sigma))
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\sigma(\nabla \cdot \nabla\psi) + (\nabla\psi) \cdot (\nabla\sigma) = 0$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \nabla\psi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\psi\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\psi\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\psi\vec{k}\right) \\
&= \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \nabla^2\psi
\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการข้างบนเขียนได้เป็น

$$\sigma\nabla^2\psi + (\nabla\psi) \cdot (\nabla\sigma) = 0$$

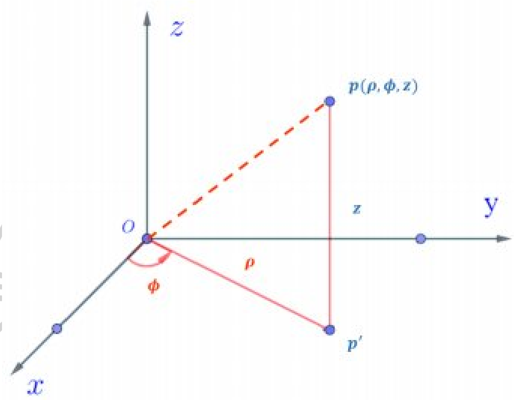
หรือ

$$\sigma\nabla^2\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\sigma}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\sigma}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\sigma}{\partial z} = 0 \tag{2.1}$$

เนื่องจากขั้วไฟฟ้าเป็นจุด การปล่อยกระแสไฟฟ้าลงดินจึงมีความสมมาตรรอบขั้วไฟฟ้าลงดินเป็นรูปครึ่งทรงกลม ดังนั้นระบบพิกัดทรงกระบอกหรือพิกัดทรงกลมน่าจะเหมาะสมกว่าระบบพิกัดฉาก

ต่อไปนี้จะใช้ระบบพิกัดทรงกระบอก จึงทำการแปลงสมการ (2.1) เป็นระบบพิกัดทรงกระบอก ดังสมการการแปลงจากระบบพิกัดฉาก ดังนี้

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\phi = tan^{-1}(\frac{y}{x})$$
$$z = z$$



รูปที่ 2.2: ความสัมพันธ์ของพิกัดฉากและพิกัดทรงกระบอก

เพื่อให้ง่ายขึ้น กำหนดให้สภาพนำไฟฟ้าขึ้นกับตัวแปร z เพียงตัวเดียวเท่านั้น สมการ (2.1) เขียนได้ใหม่เป็นดังนี้

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\sigma}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

สมการ (2.2) มีตัวแปรอิสระ 2 ตัวคือ ρ และ z ตัวแปรตามคือฟังก์ชันศักย์ ψ การหาคำตอบของสมการ (2.2) ทำได้หลายวิธี ในที่นี้จะใช้การแปลงฮันเกล (Hankel transform) [1] ที่นิยามดังนี้

$$f(\lambda, z) = \int_0^\infty \lambda\rho\,\psi(\rho, z)J_0(\lambda\rho)d\rho \quad (2.3)$$

และ

$$\psi(\rho, z) = \int_0^\infty f(\lambda, z)J_0(\lambda\rho)d\lambda \quad (2.4)$$

ใช้สมการ (2.3) แปลงสมการ (2.2) ดังนี้

$$\int_0^\infty \left[\lambda\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \lambda\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \lambda\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \left(\frac{\lambda\rho}{\sigma}\right)\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right] J_0(\lambda\rho)d\rho = \int_0^\infty \lambda\rho(0)J_0(\lambda\rho)d\rho$$

โดยใช้เทคนิคการอินทิเกรตจะได้

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lambda\left[\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right] J_0(\lambda\rho)d\rho + \int_0^\infty \lambda\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}J_0(\lambda\rho)d\rho \\ + \frac{1}{\sigma}\int_0^\infty \lambda\rho\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\sigma}{\partial z}J_0(\lambda\rho)d\rho = 0\end{aligned}$$

เนื่องจาก σ ขึ้นกับตัวแปร z เท่านั้น จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lambda\left[\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right] J_0(\lambda\rho)d\rho + \int_0^\infty \lambda\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}J_0(\lambda\rho)d\rho \\ + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z}\int_0^\infty \lambda\rho\frac{\partial\psi}{\partial z}J_0(\lambda\rho)d\rho = 0\end{aligned}$$

ทำการจัดรูปสมการ

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lambda\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right] J_0(\lambda\rho)d\rho + \int_0^\infty \lambda\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}J_0(\lambda\rho)d\rho \\ + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z}\int_0^\infty \lambda\rho\frac{\partial\psi}{\partial z}J_0(\lambda\rho)d\rho = 0\end{aligned}$$

โดยอาศัยการแบ่งช่วงอินทิเกรตและอินทิกรัลไม่ตรงแบบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \lambda\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) J_0(\lambda\rho)d\rho + \lim_{b\to\infty}\int_1^b \lambda\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) J_0(\lambda\rho)d\rho \\ + \int_0^\infty \lambda\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}J_0(\lambda\rho)d\rho + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z}\int_0^\infty \lambda\rho\frac{\partial\psi}{\partial z}J_0(\lambda\rho)d\rho = 0\end{aligned}$$

ทำการอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by parts) ทั้งสองพจน์แรกของสมการ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0^+}\left(\lambda\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}J_0(\lambda\rho)\right)\Bigg|_{\rho=a}^{1} - \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \lambda\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{d}{d\rho}J_0(\lambda\rho)d\rho \\ + \lim_{b\to\infty}\left(\lambda\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}J_0(\lambda\rho)\right)\Bigg|_{\rho=1}^{b} - \lim_{b\to\infty}\int_1^b \lambda\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{d}{d\rho}J_0(\lambda\rho)d\rho \\ + \int_0^\infty \lambda\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}J_0(\lambda\rho)d\rho + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z}\int_0^\infty \lambda\rho\frac{\partial\psi}{\partial z}J_0(\lambda\rho)d\rho = 0\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\left[\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}J_0(\lambda\rho)\right] = 0$ และ $\lim\limits_{\rho\to\infty}\left[\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}J_0(\lambda\rho)\right] = 0$ เราจึงได้ว่า

$$\begin{aligned}-\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \lambda\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{d}{d\rho}J_0(\lambda\rho)d\rho - \lim_{b\to\infty}\int_1^b \lambda\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{d}{d\rho}J_0(\lambda\rho)d\rho \\ + \int_0^\infty \lambda\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}J_0(\lambda\rho)d\rho + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z}\int_0^\infty \lambda\rho\frac{\partial\psi}{\partial z}J_0(\lambda\rho)d\rho = 0\end{aligned}$$

ใช้เทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วนในสองพจน์แรกของสมการข้างต้นอีตรั้ง จะได้ว่า

$$\begin{aligned}-\lim_{a\to 0^+}\left(\lambda\rho\psi\frac{d}{d\rho}J_0(\lambda\rho)\right)\Bigg|_{\rho=a}^{1} + \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \lambda\psi\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}J_0(\lambda\rho)\right)d\rho \\ - \lim_{b\to\infty}\left(\lambda\rho\psi\frac{d}{d\rho}J_0(\lambda\rho)\right)\Bigg|_{\rho=1}^{b} + \lim_{b\to\infty}\int_a^1 \lambda\psi\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}J_0(\lambda\rho)\right)d\rho \\ + \int_0^\infty \lambda\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}J_0(\lambda\rho)d\rho + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z}\int_0^\infty \lambda\rho\frac{\partial\psi}{\partial z}J_0(\lambda\rho)d\rho = 0\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\left[\rho\psi\frac{d}{d\rho}J_0(\lambda\rho)\right] = 0$ และ $\lim\limits_{\rho\to\infty}\left[\rho\psi\frac{d}{d\rho}J_0(\lambda\rho)\right] = 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \lambda\psi\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}J_0(\lambda\rho)\right)d\rho + \lim_{b\to\infty}\int_1^b \lambda\psi\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}J_0(\lambda\rho)\right)d\rho \\ + \int_0^\infty \lambda\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}J_0(\lambda\rho)d\rho + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z}\int_0^\infty \lambda\rho\frac{\partial\psi}{\partial z}J_0(\lambda\rho)d\rho = 0\end{aligned}$$

ทำการจัดรูปสมการ ได้เป็น

$$\int_0^\infty \lambda\psi \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{d}{d\rho} J_0(\lambda\rho)\right) d\rho + \int_0^\infty \lambda\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} J_0(\lambda\rho) d\rho + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial z}\int_0^\infty \lambda\rho \frac{\partial \psi}{\partial z} J_0(\lambda\rho) d\rho = 0$$

หรือก็คือ

$$\int_0^\infty \lambda\psi \left(\rho \frac{d^2}{d\rho^2} J_0(\lambda\rho) + \frac{d}{d\rho} J_0(\lambda\rho)\right) d\rho + \int_0^\infty \lambda\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} J_0(\lambda\rho) d\rho + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial z}\int_0^\infty \lambda\rho \frac{\partial \psi}{\partial z} J_0(\lambda\rho) d\rho = 0$$

หรือ

$$\int_0^\infty \lambda\psi (\lambda^2 \rho J_0''(\lambda\rho) + \lambda J_0'(\lambda\rho)) d\rho + \int_0^\infty \lambda\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} J_0(\lambda\rho) d\rho + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial z}\int_0^\infty \lambda\rho \frac{\partial \psi}{\partial z} J_0(\lambda\rho) d\rho = 0$$

นั่นคือ

$$\int_0^\infty \lambda\rho\psi \left(\lambda^2 J_0''(\lambda\rho) + \frac{\lambda}{\rho} J_0'(\lambda\rho)\right) d\rho + \int_0^\infty \lambda\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} J_0(\lambda\rho) d\rho + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial z}\int_0^\infty \lambda\rho \frac{\partial \psi}{\partial z} J_0(\lambda\rho) d\rho = 0$$

เนื่องจาก J_0 เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เบสเซล (Bessel's differential equation) นั่นคือ

$$\lambda^2 J_0''(\lambda\rho) + \frac{\lambda}{\rho} J_0'(\lambda\rho) = -\lambda^2 J_0(\lambda\rho)$$

จึงทำให้ได้ว่า

$$\int_0^\infty \lambda\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} J_0(\lambda\rho) d\rho + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial z}\int_0^\infty \lambda\rho \frac{\partial \psi}{\partial z} J_0(\lambda\rho) d\rho - \lambda^2 \int_0^\infty \lambda\rho\psi J_0(\lambda\rho) d\rho = 0$$

ดังนั้น โดยอาศัยการแปลงฮันเกลในสมการ (2.2) จะได้

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z} - \lambda^2 f = 0 \tag{2.5}$$

สังเกตว่าค่าศักย์ไฟฟ้าสามารถหาได้จากการใช้การแปลงฮันเกลผกผัน (inverse Hankel transform) ในสมการคำตอบของสมการ (2.5) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต

บทที่ 3

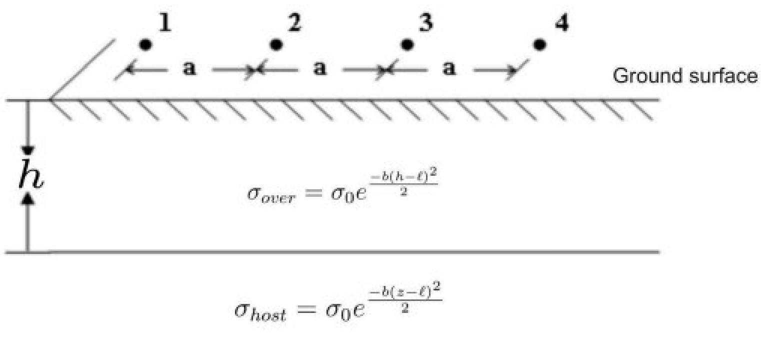
ค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏ

การศึกษาในงานวิจัยนี้ จะพิจารณาแบบจำลองที่มีสภาพนำไฟฟ้าของโลก 2 ชั้น คือดินชั้นบน (overburden) และดินชั้นล่าง (host) โดยกำหนดให้ สภาพนำไฟฟ้าของดินชั้นบนถูกกำหนดด้วยฟังก์ชันค่าคงตัวดังนี้

$$\sigma_{over} = \sigma_0 e^{\frac{-b(h-\ell)^2}{2}}$$

เมื่อ σ_0 และ b เป็นค่าคงตัวที่มากกว่าศูนย์ (positive constants) และ h เป็นความลึกจากผิวดินลงไปถึงดินชั้นล่าง หรือ host สภาพนำไฟฟ้าของดินชั้นล่าง จะถูกกำหนดโดยฟังก์ชันเลขชี้กำลังดังนี้

$$\sigma_{host} = \sigma_0 e^{\frac{-b(z-\ell)^2}{2}}$$



รูปที่ 3.1: แบบจำลองเรขาคณิตที่จัดวางขั้วไปป้าแบบเวนเนอร์

เมื่อ $z > h$

สำหรับบริเวณ $0 < z \leq h$ หรือ overburden หรือ ดินชั้นบน ที่มีค่าสภาพนำไฟฟ้าเป็นค่าคงตัว ดังนั้นสมการ (2.5) จะลดรูปลงเหลือ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \lambda^2 f = 0 \tag{3.1}$$

สมการ (3.1) มีคำตอบทั่วไปเป็น

$$f(\lambda, z) = Ae^{\lambda z} + Be^{-\lambda z} \tag{3.2}$$

เมื่อ A และ B เป็นตัวคงค่า (Arbitrary Constants) ที่หาได้จากเงื่อนไขขอบเขต

สำหรับบริเวณ $z \geq h$ หรือ Host หรือดินชั้นล่าง ที่มีสภาพนำไฟฟ้าเป็น

$$\sigma_{host}(z) = \sigma_0 e^{\frac{-b(z-\ell)^2}{2}} \tag{3.3}$$

จากสมการ (2.5) เมื่อแทนสมการ (3.3) ลงไป แล้วทำการจัดรูปสมการ จะได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - b(z-\ell)\frac{df}{dz} - \lambda^2 f = 0 \tag{3.4}$$

คำตอบทั่วไปของสมการ (3.4) เขียนได้เป็น

$$f(\lambda, z) = C\,M\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-z+\ell)^2\right) + D\,U\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-z+\ell)^2\right) \tag{3.5}$$

โดยที่ C และ D เป็นตัวคงค่า (Arbitrary Constants) $M(\,)$ และ $U(\,)$ หมายถึง Kummer's functions

เงื่อนไขแรก คือ เมื่อ $z \to \infty$ ศักย์ไฟฟ้าควรลดลงเป็น 0 ดังนั้นต้องพิจารณา $M(\,)$ และ $U(\,)$ ว่าสอดคล้องกับเงื่อนไขของธรรมชาติหรือไม่ จาก Jeffrey [12] ในปี 1995 พบว่า ถ้า $z \to \infty$ แล้ว $M(\,)$ จะมีขนาดใหญ่เป็นอนันต์ แต่ $U(\,)$ จะมีขนาดลดลงเป็นศูนย์ ดังนั้นสมการ (3.5) จะถูกกำหนดให้ $C = 0$ คำตอบทั่วไปของสมการ (3.4) จึงเขียนได้เป็น

$$f(\lambda, z) = D\,U\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-z+\ell)^2\right) \tag{3.6}$$

จากรูปของแบบจำลองเชิงเราขาคณิตที่กำหนดให้ตอนต้น ในชั้นบนหรือชั้นแรกหรือชั้น overburden ฟังก์ชันศักย์ไฟฟ้ากำหนดให้เป็น f_1 ตามสมการ (3.2)

$$f_1(\lambda, z) = Ae^{\lambda z} + Be^{-\lambda z}$$

ในชั้นล่าง (Host) ฟังก์ชันศักย์ไฟฟ้ากำหนดให้เป็น f_2 ตามสมการ (3.6)

$$f_2(\lambda, z) = D\,U\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-z+\ell)^2\right)$$

โดยการแปลงฮันเกลผกผันที่นิยามใน (2.4) เราสามารถหาฟังก์ชันศักย์ไฟฟ้า ψ_1 และ ψ_2 ได้ดังนี้

$$\psi_1(\rho, z) = \int_0^\infty f_1(\lambda, z) J_0(\lambda\rho)d\lambda = \int_0^\infty \left(Ae^{\lambda z} + Be^{-\lambda z}\right) J_0(\lambda\rho)d\lambda \tag{3.7}$$

และ

$$\psi_2(\rho, z) = \int_0^\infty f_2(\lambda, z) J_0(\lambda\rho)d\lambda = \int_0^\infty D\,U\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-z+\ell)^2\right) J_0(\lambda\rho)d\lambda \tag{3.8}$$

สังเกตว่าสมการคำตอบ (3.7) และ (3.8) มีตัวคงค่า 3 ตัวคือ A, B และ D จะหาได้จากเงื่อนไขขอบเขตจำนวน 3 เงื่อนไขดังนี้

1. ความต่อเนื่องของความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าที่ไหลตั้งฉากจากขั้วไฟฟ้าลงดิน

$$\lim_{z\to 0^+}\left(-\sigma_0 e^{\frac{-b(h-\ell)^2}{2}}\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right) = \frac{I\delta(\rho)}{2\pi\rho} \tag{3.9}$$

เมื่อ I คือกระแสไฟฟ้าที่ไหลจากขั้วไฟฟ้าลงสู่พื้นดิน และ $\delta(\rho)$ คือ Dirac Delta function ที่กำหนดโดย

$$\delta(\rho) = \begin{cases} 0 \text{ ถ้า } \rho \neq 0 \\ 1 \text{ ถ้า } \rho = 0 \end{cases}$$

2. ความต่อเนื่องของความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าในแนวตั้งฉากกับผิวรอยต่อระหว่าง

ชั้นที่ 1 และชั้นที่ 2 หรือที่ $z = h$

$$\lim_{z\to h^-}\left(\sigma_0 e^{\frac{-b(h-\ell)^2}{2}}\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right) = \lim_{z\to h^+}\left(\sigma_0 e^{\frac{-b(z-\ell)^2}{2}}\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right) \tag{3.10}$$

3. ความต่อเนื่องของศักย์ไฟฟ้าตรงรอยต่อชั้นที่ 1 และชั้นที่ 2 หรือที่ $z = h$

$$\lim_{z\to h^-}\psi_1 = \lim_{z\to h^+}\psi_2 \tag{3.11}$$

ต่อจากนี้จะทำการหาฟังก์ชันศักย์ไฟฟ้าโดยแก้ปัญหาค่าขอบเขต โดยเงื่อนไขขอบเขตแรกจากสมการ (3.9)

$$\lim_{z\to 0^+}\left\{-\sigma_0 e^{\frac{-b(h-\ell)^2}{2}}\int_0^\infty (\lambda A e^{\lambda z} - \lambda B e^{-\lambda z})J_0(\lambda\rho)d\lambda\right\} = \frac{I\delta(\rho)}{2\pi\rho} \tag{3.12}$$

เนื่องจาก $\int_0^\infty \lambda J_0(\lambda\rho)d\lambda = \frac{\delta(\rho)}{\rho}$ ดังนั้นสมการ (3.12) เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}\int_0^\infty -\sigma_0 e^{\frac{-b(h-\ell)^2}{2}}(\lambda A - \lambda B)J_0(\lambda\rho)d\lambda &= \int_0^\infty \frac{I}{2\pi}\lambda J_0(\lambda\rho)d\lambda \\ -\sigma_0 e^{\frac{-b(h-\ell)^2}{2}}(A - B) &= \frac{I}{2\pi} \\ A - B &= \frac{-Ie^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}}}{2\pi\sigma_0} \end{aligned} \tag{3.13}$$

จากเงื่อนไขที่ 2 ดังสมการ (3.10)

$$\lim_{z\to h^-}\left(\sigma_0 e^{\frac{-b(h-\ell)^2}{2}}\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right) = \lim_{z\to h^+}\left(\sigma_0 e^{\frac{-b(z-\ell)^2}{2}}\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right)$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}&\lim_{z\to h^-}\left(\sigma_0 e^{\frac{-b(h-\ell)^2}{2}}\left\{\int_0^\infty (\lambda A e^{\lambda z} - \lambda B e^{-\lambda z})J_0(\lambda\rho)d\lambda\right\}\right) \\ &= \lim_{z\to h^+}\left(\sigma_0 e^{\frac{-b(z-\ell)^2}{2}}\left\{\int_0^\infty D\left[\left(\frac{b}{2}(-z+\ell)^2 + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b} - \frac{1}{2}\right)\cdot U\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-z+\ell)^2\right)\right.\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\left. - U\left(-1 + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-z+\ell)^2\right)\right]\frac{(-b/2)(2(-z+\ell))}{(b/2)(-z+\ell)^2}\cdot J_0(\lambda\rho)d\lambda\right\}\right)\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty (\lambda A e^{\lambda h} - \lambda B e^{-\lambda h}) J_0(\lambda\rho) d\lambda \\
&= \int_0^\infty D\bigg[\left(\frac{b}{2}(-h+\ell)^2 + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b} - \frac{1}{2}\right)\cdot U\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-h+\ell)^2\right) \\
&\qquad - U\left(-1+\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-h+\ell)^2\right)\bigg]\frac{-b(-h+\ell)}{(b/2)(-h+\ell)^2}\cdot J_0(\lambda\rho)\, d\lambda
\end{aligned}$$

จากสมการข้างบนนี้และใช้สมการ (3.13) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&\left\{\left(B - \frac{Ie^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}}}{2\pi\sigma_0}\right)e^{\lambda h} - Be^{-\lambda h}\right\}\lambda \\
&= D\bigg[\left(\frac{b}{2}(-h+\ell)^2 + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b} - \frac{1}{2}\right)\cdot U\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-h+\ell)^2\right) \\
&\qquad - U\left(-1+\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-h+\ell)^2\right)\bigg]\left\{\frac{-2}{(-h+\ell)}\right\}
\end{aligned}$$

สำหรับตัวคงค่า B และ D หาได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
B = \left(\frac{1}{\lambda(e^{\lambda h} - e^{-\lambda h})}\right)\bigg\{\bigg[\left(\frac{b}{2}(-h+\ell)^2 + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b} - \frac{1}{2}\right)\cdot U\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-h+\ell)^2\right) \\
- U\left(-1+\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-h+\ell)^2\right)\bigg]\left(\frac{-2D}{-h+\ell}\right) + \frac{\lambda I e^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}+\lambda h}}{2\pi\sigma_0}\bigg\}
\end{aligned} \quad (3.14)$$

พิจารณาเงื่อนไขที่ 3 ดังสมการ (3.11)

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to h^-}\psi_1 &= \lim_{z\to h^+}\psi_2 \\
\lim_{z\to h^-}\left(Ae^{\lambda z} + Be^{-\lambda z}\right) &= \lim_{z\to h^+}\left(D\,U\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-z+\ell)^2\right)\right) \\
Ae^{\lambda h} + Be^{-\lambda h} &= D\,U\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-h+\ell)^2\right)
\end{aligned}$$

จากสมการ (3.13) จะได้

$$\left\{B - \frac{Ie^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}}}{2\pi\sigma_0}\right\}e^{\lambda h} + Be^{-\lambda h} = D\,U\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-h+\ell)^2\right)$$

ดังนั้น

$$D = \frac{\left\{B - \frac{Ie^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}}}{2\pi\sigma_0}\right\}e^{\lambda h}}{U\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-h+\ell)^2\right)} + \frac{Be^{-\lambda h}}{U\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-h+\ell)^2\right)} \tag{3.15}$$

แทน (3.15) ใน (3.14) จะได้

$$\frac{\left(B(\lambda(e^{\lambda h} - e^{-\lambda h})) - \frac{\lambda I e^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}+\lambda h}}{2\pi\sigma_0}\right)\left(\frac{-2}{-h+\ell}\right)^{-1}}{\left[\left(\frac{b}{2}(-h+\ell)^2 + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b} - \frac{1}{2}\right)\cdot U\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-h+\ell)^2\right) - U\left(-1 + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-h+\ell)^2\right)\right]}$$

$$= \frac{\left\{B - \frac{Ie^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}}}{2\pi\sigma_0}\right\}e^{\lambda h}}{U\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-h+\ell)^2\right)} + \frac{Be^{-\lambda h}}{U\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-h+\ell)^2\right)}$$

คูณตลอดด้วย $U\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-h+\ell)^2\right)$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{G}\left(B\lambda(e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}) - \frac{\lambda I e^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}+\lambda h}}{2\pi\sigma_0}\right) = Be^{\lambda h} - \frac{Ie^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}+\lambda h}}{2\pi\sigma_0} + Be^{-\lambda h}$$

เมื่อ

$$G := \left[\left(\frac{b}{2}(-h+\ell)^2 + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b} - \frac{1}{2}\right) - \frac{U\left(-1 + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-h+\ell)^2\right)}{U\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{b}, \frac{1}{2}, \frac{b}{2}(-h+\ell)^2\right)}\right]\left(\frac{-2}{-h+\ell}\right)$$

ดังนั้น

$$B\left[\frac{\lambda(e^{\lambda h} - e^{-\lambda h})}{G} - e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}\right] = \frac{\lambda I e^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}+\lambda h}}{2\pi\sigma_0 G} - \frac{Ie^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}+\lambda h}}{2\pi\sigma_0}$$

เพราะฉะนั้น

$$B = \frac{\left[\frac{\lambda}{G} - 1\right]\left(\frac{Ie^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}+\lambda h}}{2\pi\sigma_0}\right)}{\left[\left(\frac{\lambda}{G} - 1\right)e^{\lambda h} - \left(\frac{\lambda}{G} + 1\right)e^{-\lambda h}\right]} \tag{3.16}$$

นำ B จากสมการ (3.16) ไปแทนลงใน (3.13) เพื่อหา A

$$A = B - \frac{Ie^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}}}{2\pi\sigma_0} \tag{3.17}$$

นำ (3.16) และ (3.17) ไปแทนในสมการ (3.7) หาค่าศักย์ไฟฟ้าที่ตำแหน่งใด ๆ ได้

$$A = \frac{\left[\dfrac{\lambda}{G} - 1\right]\left(\dfrac{Ie^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}+\lambda h}}{2\pi\sigma_0}\right)}{\left[\left(\dfrac{\lambda}{G} - 1\right)e^{\lambda h} - \left(\dfrac{\lambda}{G} + 1\right)e^{-\lambda h}\right]} - \frac{Ie^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}}}{2\pi\sigma_0} \tag{3.18}$$

ดังนั้น จากสมการ (3.7) ฟังก์ชันศักย์ไฟฟ้าเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}\psi_1(\rho, z) = \int_0^\infty \Bigg\{ & \frac{\left[\frac{\lambda}{G} - 1\right]\left(\frac{I}{2\pi\sigma_0}\right)e^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}+\lambda h+\lambda z}}{\left[\left(\frac{\lambda}{G} - 1\right)e^{\lambda h} - \left(\frac{\lambda}{G} + 1\right)e^{-\lambda h}\right]} - \frac{Ie^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}+\lambda z}}{2\pi\sigma_0} \\ & + \frac{\left[\frac{\lambda}{G} - 1\right]\left(\frac{I}{2\pi\sigma_0}\right)e^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}+\lambda h-\lambda z}}{\left[\left(\frac{\lambda}{G} - 1\right)e^{\lambda h} - \left(\frac{\lambda}{G} + 1\right)e^{-\lambda h}\right]}\Bigg\} J_0(\lambda\rho)\, d\lambda\end{aligned} \tag{3.19}$$

ที่ผิวดินฟังก์ชันศักย์ไฟฟ้าเขียนได้เป็น

$$\psi_1(\rho, 0) = \int_0^\infty \left\{ \frac{\left[\frac{\lambda}{G} - 1\right]\left(\frac{I}{\pi\sigma_0}\right)e^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}+\lambda h}}{\left[\left(\frac{\lambda}{G} - 1\right)e^{\lambda h} - \left(\frac{\lambda}{G} + 1\right)e^{-\lambda h}\right]} - \frac{Ie^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}}}{2\pi\sigma_0} \right\} J_0(\lambda\rho)\, d\lambda \tag{3.20}$$

3.1 การคำนวณค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏ

ในงานวิจัยนี้จะใช้วิธีการจัดวางขั้วไฟฟ้าแบบของเวนเนอร์ (Wenner array) สูตรของเวนเนอร์ใช้ค่าศักย์ไฟฟ้าดังปรากฏในสมการ (3.19) ในการคำนวณหาค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏสำหรับสูตรของเวนเนอร์เขียนได้ดังนี้

$$(\sigma_{\mathsf{app}})_W = \frac{I}{2\pi a(\nabla V)_W} \tag{3.21}$$

เมื่อ a เป็นระยะห่างระหว่างขั้วไฟฟ้า $(\nabla V)_W$ เป็นค่าความต่างศักย์ไฟฟ้าที่กำหนดโดย

$$(\nabla V)_W = 2[\psi(a) - \psi(2a)] \tag{3.22}$$

$\psi(a)$ คือค่าฟังก์ชันศักย์ไฟฟ้าที่มีระยะห่างระหว่างขั้วไฟฟ้าเท่ากับ a และคำนวณได้จากสมการ (3.20)

$$\psi_1(a,0) = \int_0^\infty \left\{ \frac{\left[\frac{\lambda}{G}-1\right]\left(\frac{I}{\pi\sigma_0}\right) e^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}+\lambda h}}{\left[\left(\frac{\lambda}{G}-1\right)e^{\lambda h} - \left(\frac{\lambda}{G}+1\right)e^{-\lambda h}\right]} - \frac{Ie^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}}}{2\pi\sigma_0} \right\} J_0(\lambda a)\, d\lambda$$

และ

$$\psi_1(2a,0) = \int_0^\infty \left\{ \frac{\left[\frac{\lambda}{G}-1\right]\left(\frac{I}{\pi\sigma_0}\right) e^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}+\lambda h}}{\left[\left(\frac{\lambda}{G}-1\right)e^{\lambda h} - \left(\frac{\lambda}{G}+1\right)e^{-\lambda h}\right]} - \frac{Ie^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}}}{2\pi\sigma_0} \right\} J_0(2\lambda a)\, d\lambda$$

แทนค่าทั้งสองฟังก์ชันลงในสมการ (3.22) ได้ว่า

$$\begin{aligned}(\nabla V)_W &= 2\int_0^\infty \left\{ \frac{\left[\frac{\lambda}{G}-1\right]\left(\frac{I}{\pi\sigma_0}\right) e^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}+\lambda h}}{\left[\left(\frac{\lambda}{G}-1\right)e^{\lambda h} - \left(\frac{\lambda}{G}+1\right)e^{-\lambda h}\right]} - \frac{Ie^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}}}{2\pi\sigma_0} \right\} \left(J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)\right)\, d\lambda \\ &= \frac{2I}{\pi\sigma_0}\int_0^\infty \left\{ \frac{\left[\frac{\lambda}{G}-1\right] e^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}+\lambda h}}{\left[\left(\frac{\lambda}{G}-1\right)e^{\lambda h} - \left(\frac{\lambda}{G}+1\right)e^{-\lambda h}\right]} - \frac{e^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}}}{2} \right\} \left(J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)\right)\, d\lambda\end{aligned} \tag{3.23}$$

โดยใช้สมการ (3.21) ได้ว่า

$$(\sigma_{\mathsf{app}})_W = \frac{\sigma_0}{4a}\left(\int_0^\infty \left\{ \frac{\left[\frac{\lambda}{G}-1\right] e^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}+\lambda h}}{\left[\left(\frac{\lambda}{G}-1\right)e^{\lambda h} - \left(\frac{\lambda}{G}+1\right)e^{-\lambda h}\right]} - \frac{e^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}}}{2} \right\} \left(J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)\right)\, d\lambda\right)^{-1} \tag{3.24}$$

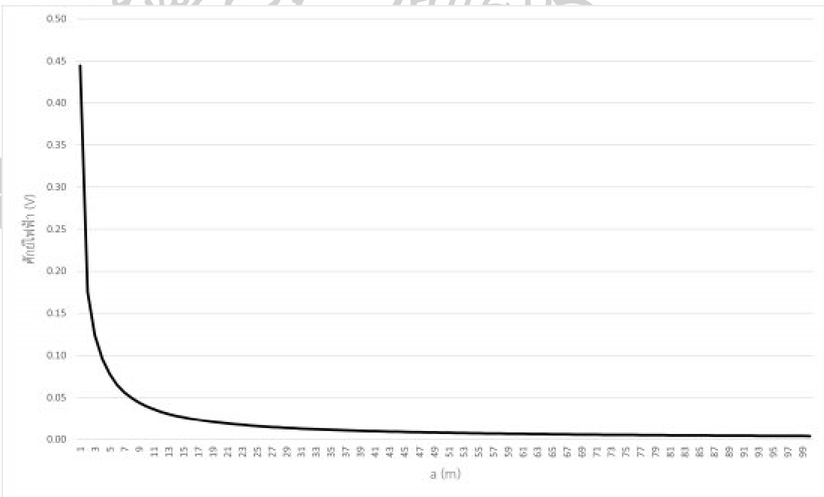
ซึ่งสมการ (3.24) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ (the normalized apparent conductivity)

$$\frac{\left(\sigma_{\mathsf{app}}\right)_W}{\sigma_{over}} = \frac{e^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}}}{4a}\left(\int_0^\infty \left\{ \frac{\left[\frac{\lambda}{G}-1\right] e^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}+\lambda h}}{\left[\left(\frac{\lambda}{G}-1\right) e^{\lambda h} - \left(\frac{\lambda}{G}+1\right) e^{-\lambda h}\right]} - \frac{e^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}}}{2} \right\} \times \left(J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)\right) d\lambda \right)^{-1} \tag{3.25}$$

บทที่ 4

การทดลองเชิงตัวเลข

การศึกษาสภาพนำไฟฟ้าปรากฏโดยใช้สูตรของเวนเนอร์ จำเป็นต้องหาค่าศักย์ไฟฟ้าซึ่งอาจหาได้จากการวัดโดยใช้เครื่องมือทางฟิสิกส์ หรืออาจใช้การคำนวณโดยใช้สมการ (3.20) ในงานวิจัยนี้จะหาค่าศักย์ไฟฟ้าโดยการคำนวณและศึกษาพฤติกรรมของค่าศักย์ไฟฟ้า เมื่อกำหนดค่า $b = 0.1\,m^{-1}, \sigma_0 = 1\,S/m, I = 5\,A, \ell = 0.6\,m,$ และ $h = 0.5\,m$ ผลการคำนวณค่าศักย์ไฟฟ้าโดยใช้สมการ (3.20) โดยการแปรค่า a จาก $1\,m$ จนถึง $100\,m$ ได้ผลดังแสดงในรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1: แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าศักย์ไฟฟ้าเมื่อแปรค่า a เมื่อกำหนด $\sigma_0 = 1\,S/m, b = 0.1\,m^{-1}, I = 5\,A, \ell = 0.6\,m, h = 0.5\,m$

จากกราฟจะเห็นได้ว่าค่าศักย์ไฟฟ้าลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อ a เพิ่มขึ้น จึงสอดคล้องกับหลักการของพลังงานจะลดลงเมื่อระยะห่างจากแหล่งกำเนิดเพิ่มขึ้น จากกราฟไม่ปรากฏการแกว่ง

ตัว นั่นแสดงว่าอิทธิพลของแผ่นจานไม่ส่งผลให้เห็นผ่านค่าศักย์ไฟฟ้า

ในการสำรวจวัดหาค่าสภาพนำไฟฟ้าประยุกต์ได้จากหลักการปล่อยกระแสไฟฟ้าไปตามเส้นลวดลงสู่ดิน กระแสไฟฟ้าจะไหลออกไปจากจุดที่ปล่อยหากใต้ผิวดินเป็นตัวนำที่ยอมให้กระแสไฟฟ้าไหลผ่าน ซึ่งจะสามารถวัดค่าของศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากผลของกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านในตัวกลางได้ และเมื่อทราบค่าของกระแสไฟฟ้าที่ปล่อยลงไปจากขั้วไฟฟ้า ย่อมสามารถหาค่าของสภาพนำไฟฟ้าได้ตามกฎของโอห์มซึ่งขึ้นอยู่กับค่าของสภาพนำไฟฟ้าของชั้นดินในบริเวณที่ปล่อยกระแสไฟฟ้า และระยะทางที่กระแสไฟฟ้าไหลผ่าน

ในหัวข้อนี้ผู้วิจัยจะทำการคำนวณและแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ (normalized apparent conductivity) และระยะห่างระหว่างขั้วไฟฟ้า ซึ่งข้อมูลที่ได้นั้นมาจากการทดลองเชิงตัวเลข ซึ่งผู้วิจัยได้ทำการทดลองในกรณีที่โครงสร้างของโลกแบ่งออกเป็น 2 ชั้น ซึ่งในดินชั้นบนมีสภาพนำไฟฟ้าเป็นค่าคงตัว และสภาพนำไฟฟ้าในดินชั้นล่างมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ดังรูปที่ 4.2, 4.3, 4.4 และ 4.5 แต่ละรูปจะแสดงเส้นกราฟทั้งหมด 3 เส้นกราฟที่แสดงค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ เมื่อมีการแปรค่าของ σ_0, b, I และ h ดังตัวอย่างที่จะแสดงถัดไป

ค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ (the normalized apparent conductivity) คำนวณได้จากสมการข้างล่างนี้ ที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 3

$$\frac{(\sigma_{\mathrm{app}})_W}{\sigma_{over}} = \frac{e^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}}}{4a}\left(\int_0^\infty \left\{ \frac{\left[\frac{\lambda}{G}-1\right] e^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}+\lambda h}}{\left[\left(\frac{\lambda}{G}-1\right)e^{\lambda h} - \left(\frac{\lambda}{G}+1\right)e^{-\lambda h}\right]} - \frac{e^{\frac{b(h-\ell)^2}{2}}}{2} \right\} \times \left(J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)\right) d\lambda \right)^{-1} \tag{3.25}$$

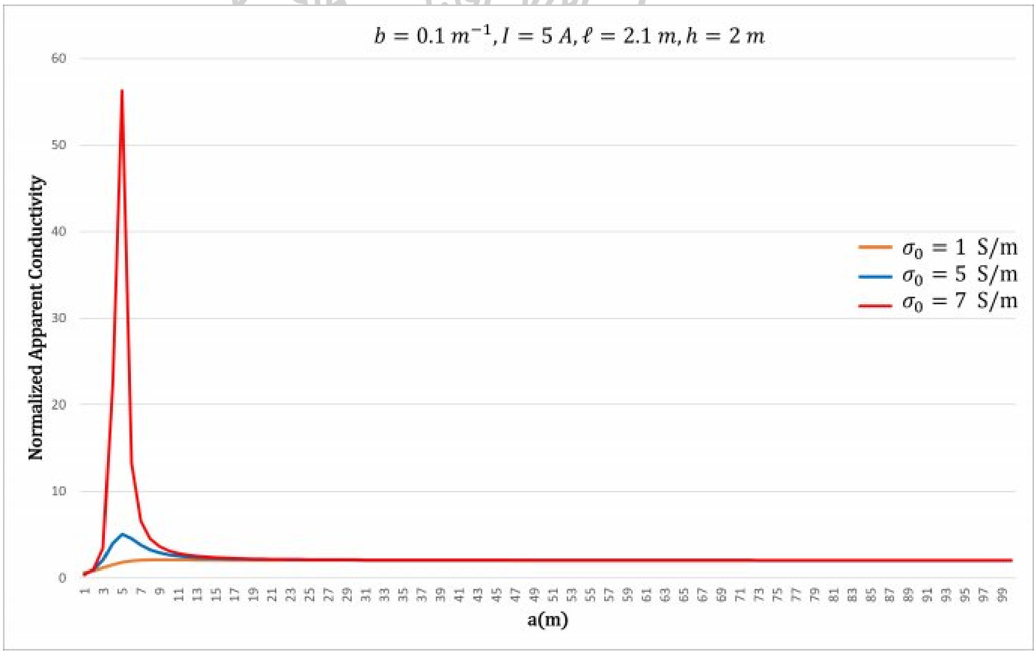
ตัวอย่าง 1 พิจารณาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการสำรวจแผ่นจานที่ฝังอยู่ในโครงสร้างใต้พื้นโลกที่แบ่งออกเป็น 2 ชั้น โดยรอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะขนานไปกับพื้นโลก ซึ่งในดินชั้นบนมีความลึกจำกัด h เมตร และสภาพนำไฟฟ้าถูกกำหนดโดยค่าคงตัว นิยามโดย

$$\sigma_{over} = \sigma_0 e^{\frac{-b(h-\ell)^2}{2}}$$

และดินชั้นล่างมีความลึกเป็นอนันต์ สภาพนำไฟฟ้ามีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เมื่อความลึกเพิ่มขึ้น นิยามโดย

$$\sigma_{host} = \sigma_0 e^{\frac{-b(z-\ell)^2}{2}}$$

เมื่อ I แทนไฟฟ้ากระแสตรงที่ไหลผ่านขั้วไฟฟ้า $\sigma_0 > 0$ และ $b > 0$ เป็นค่าคงตัว ℓ เป็นความลึกของแผ่นจาน และ $z > h$ โดยในตัวอย่างการทดลองนี้ เรากำหนดให้ $\sigma_0 = 1, 5, 7$ S/m, $b = 0.1\, m^{-1}$, $I = 5\, A$, $\ell = 2.1\, m$ และ $h = 2\, m$ โดยอาศัยสมการที่ (3.25) พฤติกรรมของสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์สามารถแสดงได้ดังกราฟในรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2: กราฟแสดงค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ (normalized apparent conductivity) โดยแปรค่าระยะ a เมื่อ $\sigma_0 = 1, 5, 7\, S/m, b = 0.1\, m^{-1}, I = 5\, A,$ $, \ell = 2.1\, m$ และ $h = 2\, m$

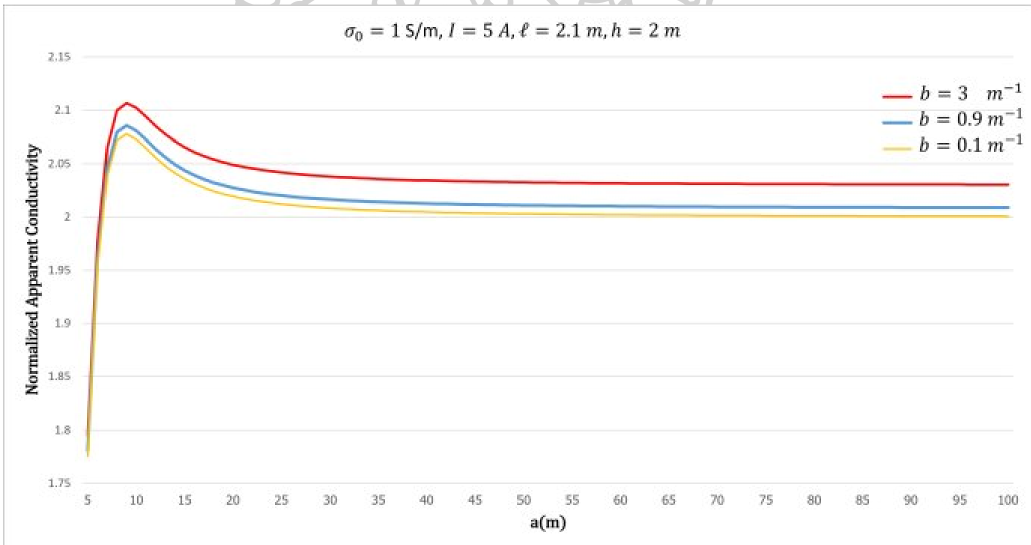
ตัวอย่าง 2 พิจารณาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการสำรวจแผ่นจานที่ฝังอยู่ในโครงสร้างใต้พื้นโลกที่แบ่งออกเป็น 2 ชั้น โดยรอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะขนานไปกับพื้นโลก ซึ่งในดินชั้นบนมีความลึกจำกัด h เมตร และสภาพนำไฟฟ้าถูกกำหนดโดยค่าคงตัว นิยามโดย

$$\sigma_{over} = \sigma_0 e^{\frac{-b(h-\ell)^2}{2}}$$

และดินชั้นล่างมีความลึกเป็นอนันต์ สภาพนำไฟฟ้ามีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เมื่อความลึกเพิ่มขึ้น นิยามโดย

$$\sigma_{host} = \sigma_0 e^{\frac{-b(z-\ell)^2}{2}}$$

โดยในตัวอย่างการทดลองนี้ เรากำหนดให้ $\sigma_0 = 1\,S/m$ $b = 3, 0.9, 0.1\,m^{-1}$ $I = 5\,A$ $\ell = 2.1\,m$ และ $h = 2\,m$ โดยอาศัยสมการที่ (3.25) พฤติกรรมของสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์สามารถแสดงได้ดังกราฟในรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3: กราฟแสดงค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ (normalized apparent conductivity) เมื่อ $\sigma_0 = 1\,S/m, b = 3, 0.9, 0.1\,m^{-1}, I = 5\,A\,, \ell = 2.1\,m$ และ $h = 2\,m$

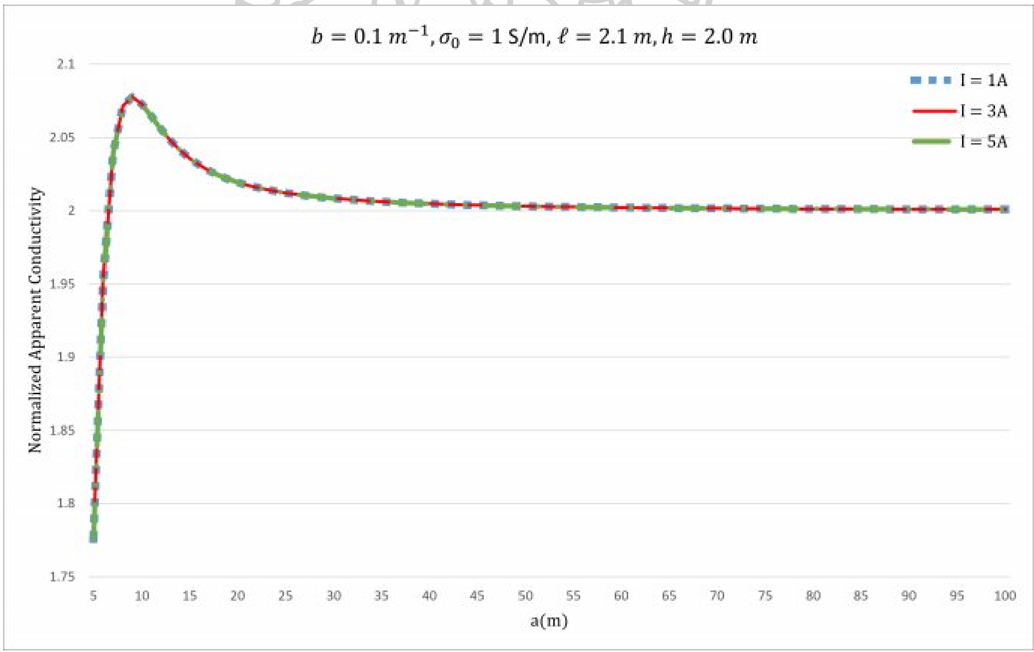
ตัวอย่าง 3 พิจารณาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการสำรวจแผ่นจานที่ฝังอยู่ในโครงสร้างใต้พื้นโลกที่แบ่งออกเป็น 2 ชั้น โดยรอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะขนานไปกับพื้นโลก ซึ่งในดินชั้นบนมีความลึกจำกัด h เมตร และสภาพนำไฟฟ้าถูกกำหนดโดยค่าคงตัว นิยามโดย

$$\sigma_{over} = \sigma_0 e^{\frac{-b(h-\ell)^2}{2}}$$

และดินชั้นล่างมีความลึกเป็นอนันต์ สภาพนำไฟฟ้ามีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เมื่อความลึกเพิ่มขึ้น นิยามโดย

$$\sigma_{host} = \sigma_0 e^{\frac{-b(z-\ell)^2}{2}}$$

โดยในตัวอย่างการทดลองนี้ เรากำหนดให้ $\sigma_0 = 1\,S/m$ $b = 0.1\,m^{-1}$ $I = 1, 3, 5\,A$ $\ell = 2.1\,m$ และ $h = 2\,m$ โดยอาศัยสมการที่ (3.25) พฤติกรรมของสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์สามารถแสดงได้ดังกราฟในรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4: กราฟแสดงค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ (normalized apparent conductivity) เมื่อ $\sigma_0 = 1\,S/m, b = 0.1\,m^{-1}, I = 1, 3, 5\,A$, $\ell = 2.1\,m$ และ $h = 2\,m$

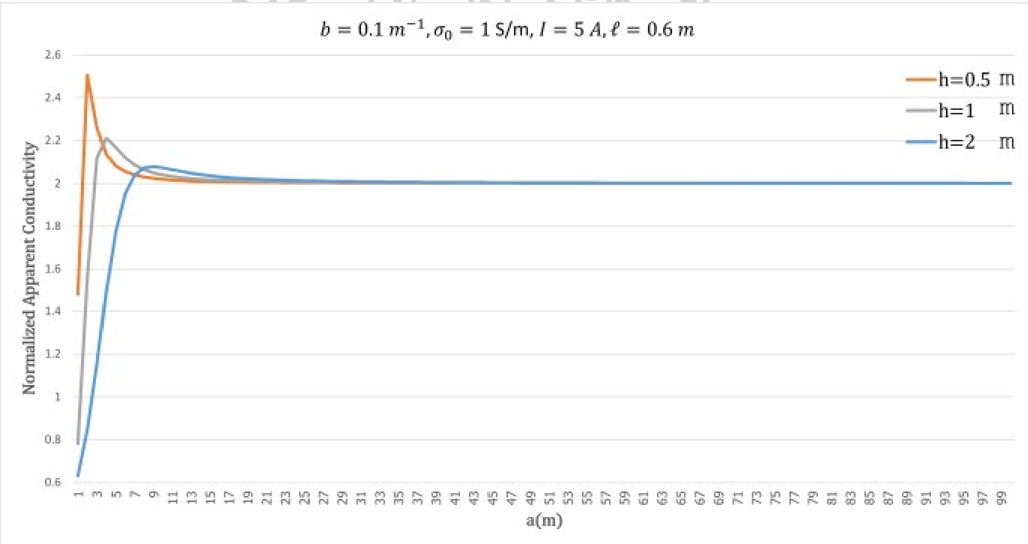
ตัวอย่าง 4 พิจารณาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการสำรวจแผ่นจานที่ฝังอยู่ในโครงสร้างใต้พื้นโลกที่แบ่งออกเป็น 2 ชั้น โดยรอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะขนานไปกับพื้นโลก ซึ่งในดินชั้นบนมีความลึกจำกัด h เมตร และสภาพนำไฟฟ้าถูกกำหนดโดยค่าคงตัว นิยามโดย

$$\sigma_{over} = \sigma_0 e^{\frac{-b(h-\ell)^2}{2}}$$

และดินชั้นล่างมีความลึกเป็นอนันต์ สภาพนำไฟฟ้ามีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เมื่อความลึกเพิ่มขึ้น นิยามโดย

$$\sigma_{host} = \sigma_0 e^{\frac{-b(z-\ell)^2}{2}}$$

โดยในตัวอย่างการทดลองนี้ เรากำหนดให้ $\sigma_0 = 1\,S/m$ $b = 0.1\,m^{-1}$ $I = 5\,A$ $\ell = 2.6\,m$ และ $h = 0.5, 1, 2\,m$ โดยอาศัยสมการที่ (3.25) พฤติกรรมของสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์สามารถแสดงได้ดังกราฟในรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.5: กราฟแสดงค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ (normalized apparent conductivity) เมื่อ $\sigma_0 = 1\,S/m, b = 0.1\,m^{-1}, I = 5\,A\,, \ell = 2.6\,m$ และ $h = 0.5, 1, 2\,m$

จากรูปที่ 4.2 เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างของขั้วไฟฟ้า และค่าของสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ในกรณีที่ชั้นดินใต้ผิวดินมี 2 ชั้น เมื่อค่าสภาพนำไฟฟ้า $\sigma_0 = 1, 5, 7\,S/m$ ตามลำดับและคุมค่าพารามิเตอร์อื่นไว้ สังเกตว่า หากระยะห่างของขั้วไฟฟ้านั้นห่างกันไม่มากเกินไป ($a \leq 11$ เมตร) ค่าของสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์มีการแปรปรวนอย่างมาก ซึ่งแปรผันตรงกับค่าสภาพนำไฟฟ้า ณ ผิวดินลักษณะกราฟนั้นจะเพิ่มขึ้นอย่างยิ่งยวดจนถึง ณ จุดหนึ่ง ($a = 5$) กราฟจะลดลงอย่างต่อเนื่องจนกระทั่งคล้ายกับลักษณะของกราฟเส้นตรง จากนั้นค่าของสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์จะค่อนข้างคงที่ ไม่มีเปลี่ยนแปลงตามการเปลี่ยนแปลงค่าของ σ_0 เมื่อระยะห่างของขั้วไฟฟ้าตั้งแต่ $a > 13$ เมตรเป็นต้นไป พฤติกรรมที่น่าสนใจและสอดคล้องกับธรรมชาติ คือ เมื่อมีการเปลี่ยนค่า σ_0 จาก $1\,S/m, 5\,S/m$ และ $7\,S/m$ ส่งผลต่อค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์อย่างมาก ดังกราฟรูปที่ 4.2 กล่าวคือ ค่า σ_0 ซึ่งเป็นค่าพารามิเตอร์ที่กำหนดค่าความนำไฟฟ้าของตัวกลาง ถ้า σ_0 มีค่ามากแสดงถึงตัวกลางนำไฟฟ้าได้ดี ดังนั้นกราฟเส้นที่มี $\sigma_0 = 7\,S/m$ จะสูงกว่ากราฟเส้น $\sigma_0 = 5\,S/m$ และ $1\,S/m$ นอกจากนี้จะเห็นได้ว่า กราฟจะเปลี่ยนแปลงมากในบริเวณที่ a มีค่าใกล้ๆกับบริเวณที่มีจานฟังอยู่ด้วย

กราฟรูปที่ 4.3 แสดงผลการเปรียบเทียบลักษณะการเปลี่ยนแปลงของค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์กับระยะห่างของขั้วไฟฟ้าเช่นเดิม โดยลักษณะธรณียังเป็นเฉกเช่นเดียวกับรูปที่ 4.2 ยกเว้นตัวพารามิเตอร์ b มีการเปลี่ยนแปลงแทน σ_0 จากกราฟเห็นได้ชัดว่า ค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์แปรผันตามค่า b ซึ่งในทุกกราฟเส้นโค้ง ค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์มีการเพิ่มขึ้นแบบฉับพลันเมื่อระยะห่างของขั้วไฟฟ้า a มีค่าน้อย ๆ และหลังจากนั้นค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์จะลดลงอย่างช้า ๆ เมื่อ a เพิ่มขึ้นจนเป็นเส้นตรงเมื่อ $a = 40\,m$ จากกราฟรูปที่ 4.3 จะพบพฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงของกราฟคล้าย ๆ รูปที่ 4.2 เนื่องจาก b เป็นพารามิเตอร์ที่ควบคุมสภาพนำไฟฟ้าของตัวกลางเช่นเดียวกับ σ_0 ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงค่า b จะส่งผลต่อกราฟสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์เช่นกัน

จากทั้งสองตัวอย่างการเปลี่ยนแปลงค่าของ σ_0 หรือ b จะส่งผลต่อค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ แต่พฤติกรรมนี้เราจะไม่พบเจอเมื่อทำการเปลี่ยนค่ากระแสไฟฟ้า ดังเช่นในรูปที่ 4.4 ซึ่งจากกราฟไม่ว่าเราจะเพิ่มหรือลดค่ากระแสไฟฟ้า I กราฟเส้นโค้งของค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ยังคงทับกันสนิท โดยจะเพิ่มขึ้นอย่างฉับพลันเมื่อ a มีค่าน้อย ๆ และเริ่มลดลงอย่างช้า ๆ จนเป็นเส้นตรงในท้ายที่สุด เมื่อย้อนไปดูสมการ (3.25) จะพบสาเหตุที่กราฟทั้งสามซ้อนทับกันอันเนื่องมาจาก สมการ (3.25) เป็นอิสระจากค่ากระแสไฟฟ้า

I นั่นเอง

ในกรณีของความสัมพันธ์ระหว่างค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ เมื่อระยะ a แปรค่า มีการเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ความลึก h ผลลัพธ์นั้นได้แสดงไว้ในรูปที่ 4.5 พบว่า ค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์มีการเพิ่มขึ้นฉับพลันในช่วงที่ a มีค่าน้อย ๆ โดยที่ถ้าค่า h น้อยแล้วค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์จะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วกว่ากรณีที่ h มีค่ามาก แต่เส้นโค้งก็จะลดลงจนเป็นเส้นตรงรวดเร็วกว่าในกรณีที่ h มีค่ามาก ดังที่ปรากฏในรูปที่ 4.5 ในกรณีปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ h เป็นการปรับความหนาของดินชั้นบน เมื่อ h มีค่าน้อยหมายถึงดินชั้นบนบาง ทำให้อิทธิพลของดินชั้นล่างที่มีจานฝังอยู่ส่งผลกับกราฟสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์อย่างชัดเจน ยิ่งดินชั้นบนยิ่งบางกราฟยิ่งสูงขึ้น

บทที่ 5

วิจารณ์และสรุปผลการวิจัย

จากการศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยได้นำเสนอการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการสำรวจโครงสร้างใต้พื้นโลก โดยตั้งสมมติฐานว่า โครงสร้างของพื้นโลกแบ่งออกเป็น 2 ชั้น ได้แก่ดินชั้นบน (overburden) และดินชั้นล่าง (host) โดยรอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะเป็นระนาบขนานกับพื้นผิวโลก โดยดินชั้นบนมีความลึกจำกัด h และดินชั้นล่างมีความลึกเป็นอนันต์ โดยสภาพนำไฟฟ้าใต้ผิวดินของดินชั้นบนเป็นค่าคงตัวที่กำหนดโดย $\sigma_{over} = \sigma_0 e^{\frac{-b(h-\ell)^2}{2}}$ และค่าสภาพนำไฟฟ้าของดินชั้นล่างแปรผันตามความลึกและถูกกำหนดได้ด้วยฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $\sigma_{host} = \sigma_0 e^{\frac{-b(z-\ell)^2}{2}}$

ในบทที่ 2 กล่าวถึงการศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังในสมมติฐานที่กล่าวไว้ข้างต้นแสดงสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยอาศัยทฤษฎีพื้นฐาน การวิเคราะห์เวกเตอร์ การแปลงระบบพิกัดทรงกระบอกจากระบบพิกัดฉาก อีกทั้งยังนำเทคนิดการแปลงฮันเกลจนนำมาซึ่งสมการของปัญหา ดังสมการ (2.5)

ในบทที่ 3 กล่าวถึงการศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยมีเป้าหมายที่การหา คำตอบทั่วไปของสมการศักย์ไฟฟ้า เมื่อแบบจำลองสภาพนำไฟฟ้าใต้พื้นโลกที่แบ่งออกเป้น 2 ชั้น ดินชั้นบนมีสภาพนำไฟฟ้าเป็นค่าคงตัว และสภาพนำไฟฟ้าของดินชั้นล่างมีความเปลี่ยนแปลงแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เราสามารถหาสมการฟังก์ชันศักย์ไฟฟ้าได้โดย อาศัยการแปลงฮันเกลผกผันควบคู่กับเงื่อนไขขอบเขตจากสมการของปัญหา (2.5) ซึ่งคำตอบทั่วไปของฟังก์ชันศักย์ไฟฟ้า สามารถบรรยายได้โดยฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง ดังสมการ (3.19) อีกทั้ง ผู้วิจัยได้คำนวณค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏโดยอาศัยการจัดวางขั้วไฟฟ้าแบบของเวนเนอร์ ซึ่งค่าของสภาพนำไฟฟ้าปรากฏได้แสดงไว้ในสมการ (3.24) และค่าของสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ ดังในสมการ (3.25)

ในบทที่ 4 ได้ทำการทดลองเชิงตัวเลขโดยการสร้างตัวอย่างตามแบบจำลองเมื่อมีการแปรค่าตัวพารามิเตอร์ต่าง ๆ โดยกราฟแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ที่สามารถคำนวณได้จากสมการ (3.25) และระยะห่างของขั้วไฟฟ้า a พบว่าฟังก์ชันที่สภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ได้จากงานวิจัย สอดคล้องกับงานวิจัยของ Chen และ Oldenburg (2003) ยิ่งไปกว่านั้นหากพิจารณาตัวอย่างในรูปที่ 4.5 พบว่าค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์มีการเพิ่มขึ้นฉับพลันในช่วงที่ a มีค่าน้อย ๆ โดยที่ถ้าค่า h น้อยจะมีการเพิ่มขึ้นที่รวดเร็วมากกว่าเมื่อ h มีค่ามาก นอกจากนี้ หากทำการเปลี่ยนค่ากระแสไฟฟ้า ดังเช่นในตัวอย่างของรูปที่ 4.4 จะพบว่าการเปลี่ยนแปลงค่ากระแสไฟฟ้า I ไม่ส่งผลกับค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์ กราฟเส้นโค้งจะเพิ่มขึ้นอย่างฉับพลันเพื่อ a น้อย ๆ และจะลดลงอย่างช้า ๆ เป็นเส้นตรงในท้ายที่สุด ค่าพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับค่าสภาพนำไฟฟ้าอย่าง σ_0 และ b ก็ส่งผลกับกราฟสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์แล้วเช่นกัน ค่า σ_0 และ b ที่ส่งผลให้สภาพนำไฟฟ้ามีค่ามากจะส่งผลให้ค่าสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์เปลี่ยนแปลงมากเช่นกัน ซึ่งสอดคล้องกับวรรณกรรมที่มีนักวิจัยหลายคนสรุปไว้ว่ากราฟสภาพนำไฟฟ้าปรากฏที่ถูกนอมัลไลซ์กับระยะห่างระหว่างขั้วไฟฟ้า a สามารถนำมาใช้สื่อถึงค่าสภาพนำไฟฟ้าจริงใต้พื้นโลกได้

งานที่คาดว่าจะดำเนินการศึกษาต่อไปในอนาคต คือการศึกษาปัญหา n ชั้นใน 2 หรือ 3 มิติ

บรรณานุกรม

[1] I. Ali and S. Kalla, A generalized Hankel transform and its use for solving certain partial differential equation, *J. Austral. Math. Soc.* Ser.B **41** (1999), 105-117.

[2] L. A. Allaud and M. H. Martin, Schlumberger, the history of a technique, *John Wiley and Sons*, New York, 1977.

[3] B. Banerjee, B. J. Sengupta and B. P. Pal, Apparent resistivity of a mutilayered carth with a layer having exponential varying conductivity, *Geophysical Prospecting* **28** (1980), 435-452.

[4] B. Banerjee, B. J. Sengupta and , B. P. Pal, Resistivity sounding on a multi-layered earth containing transition layers, *Geophysical Prospecting* **28** (1980), 750- 758.

[5] T. Chaladgarn, Mathematical Model of Direct Current Sounding for a Conductive Bulge Earth, Ph.D. dissertation, School of Science, Faculty of Mathematics, Silpakorn University.

[6] T. Chaladgarn and S. Yooyuanyong, Mathematical Modeling of Resistivity Probing of Ancient City at Propathom Chadee, Nakhon Pathom, Thailand, *Applied Mathematical Sciences* V.7(98)(2013), 4847-4856.

[7] A. D. Chave, Numerical integration of related Hankel transforms by quadrature and continued fraction expansion, *Geophysics* **48** (1983), 1671 -1686

[8] J. Chen and D. W. Oldenburg, Magnetic and electrical fields of direct currents in a layered earth, *Expl. Geophys* **35**(2) (2003), 157-163.

[9] R. N. Edwards and M. N. Nabighian, The magnetometric resistivity method, *Soc. Expl. Geophys*, 1991.

[10] R. W. Fox and D. Gilbert, On the electro-magnetic properties of metalliferous veins in the mines of CornwallPhil. *Trans. R. Soc.*, **120** (1830), 399-414

[11] O. H. Gish and W. J. Rooney, Measurement of resistivity of large masses of undisturbed earth, *Terr. Magn. Atmos. Electr.*, **30**(4) (1925), 161– 188

[12] A. Jeffrey, Handbook of Mathematical Formulas and Integrals, *London : Academic Press*, 1995.

[13] P. Ketchanwit, Time domain electromagnetic response in heterogeneous media, *M. Sc. Thesis*, Silpakorn University, 2001.

[14] H. S. Kim and K. Lee, Response of a mutilayered earth with a layer having exponential varying resistivities, *Geophysics* **61** (1996), 180 - 191.

[15] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Vetterling, Numerical Recipes in Fortran 77, *London : Cambridge University Press*, 2001.

[16] S. S. Raghuwanshi and B. Singh, Resistivity sounding on a horizontally stratified multilayered earth, *Geophysical Prospecting* **34** (1986), 409 – 423.

[17] P. F. Siew and S. Yooyuanyong, The electromagnetic response of a disk beneath an exponentioally varying conductive overburden, *J. Australian Mathematical Society.*, Series B **41** (2000), E1 - E28.

[18] C. H. Stoyer and J. R. Wait, Resistivity probing of an exponential earth with a homogeneous overburden, *Geophysics* **15** (1977), 11- 18.

[19] W. M. Telford, L. P. Geldart and R. E. Sheriff, Applied Geophysics Second Edition, *Cambrige University Press*, 1996.

[20] F. Wenner, A method of measuring earth resistivity, *Washington, D.C.: U.S. Dept. of Commerce*, Bureau of Standards United States., 1916 .

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

เกรเดียนต์ ไดเวอร์เจนต์ และเคิร์ล

บทนิยาม 1 เราเรียกฟังก์ชัน f ว่าสนามเชิงสเกลาร์ (scalar field) ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าจริงซึ่งนิยามบน $S \subset \mathbb{R}$

บทนิยาม 2 เราเรียก $\vec{F}$ ว่าสนามเชิงเชิงเวกเตอร์ (vector field) ถ้า $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่งนิยามบน $S \subset \mathbb{R}$

บทนิยาม 3 ตัวดำเนินการเดล (del operator) แทนด้วยสัญลักษณ์ ∇ ซึ่งนิยามโดย

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

บทนิยาม 4 ให้ f เป็นสนามเชิงสเกลาร์ที่มีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งต่อเนื่อง *เกรเดียนต์* ของ f คือ ฟังก์ชันเวกเตอร์ แทนด้วยสัญลักษณ์ $grad\, f$ หรือ ∇f ที่นิยามโดย

$$\nabla f = grad\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

ข้อสังเกต ไดเวอร์เจนต์ของสนามเวกเตอร์ใด ๆ เป็น ฟังก์ชันสเกลาร์

บทนิยาม 5 ให้ $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ เป็นสนามเชิงเวกเตอร์ที่มีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งต่อเนื่อง *ไดเนอร์เจนต์* (divergent) ของ $\vec{F}$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $div\, \vec{F}$ หรือ $\nabla \cdot \vec{F}$ นิยามโดย

$$\nabla \cdot \vec{F} = div\, \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

บทนิยาม 6 ให้ $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ เป็นสนามเชิงเวกเตอร์ที่มีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งต่อเนื่อง *เคิร์ล* (curl) ของ $\vec{F}$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $curl\, \vec{F}$ หรือ
$\nabla \times \vec{F}$ นิยามโดย

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

บทนิยาม 7 ให้ f เป็นสนามเชิงสเกลาร์ *ลาปลาเชียน* (Laplacian)ของ f แทนด้วยสัญลักษณ์ Δf หรือ $\nabla \cdot \nabla f$ นิยามโดย

$$\Delta f(x, y, z) = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ทฤษฎีบท 8 (Gradient Identities)

ถ้า f และ g เป็นสนามเชิงสเกลาร์มที่มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งต่อเนื่อง และ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นสนามเชิงเวกเตอร์ที่มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งต่อเนื่อง แล้ว

1. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
2. $\nabla(cf) = c\nabla f$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
3. $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$
3. $\nabla(f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2$ ณ ตำแหน่ง $\mathbf{x}$ ซึ่ง $g(\mathbf{x}) \neq 0$
4. $\nabla(\vec{F} \cdot \vec{G}) = \vec{F} \times (\nabla \times \vec{G}) - (\nabla \times \vec{F}) \times \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} + (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G}$

โดยในที่นี้

$$(\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} = G_1\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + G_2\frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + G_3\frac{\partial \vec{F}}{\partial z}$$

ทฤษฎีบท 9 (Divergence Identities)

ถ้า f และ g เป็นสนามเชิงสเกลาร์มที่มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งต่อเนื่อง และ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นสนามเชิงเวกเตอร์ที่มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งต่อเนื่อง แล้ว

1. $\nabla \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \nabla \cdot \vec{F} + \nabla \cdot \vec{G}$
2. $\nabla \cdot (c\vec{F}) = c\nabla \cdot \vec{F}$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
3. $\nabla \cdot (f\vec{F}) = (\nabla f) \cdot \vec{F} + f\nabla \cdot \vec{F}$
4. $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$

ทฤษฎีบท 10 (Curl Identities)

ถ้า f และ g เป็นสนามเชิงสเกลาร์ที่มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งต่อเนื่อง และ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นสนามเชิงเวกเตอร์ที่มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งต่อเนื่อง แล้ว

1. $\nabla \times (\vec{F} + \vec{G}) = \nabla \times \vec{F} + \nabla \times \vec{G}$
2. $\nabla \times (c\vec{F}) = c\nabla \times \vec{F}$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
3. $\nabla \times (f\vec{F}) = (\nabla f) \times \vec{F} + f\nabla \times \vec{F}$
4. $\nabla \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F}(\nabla \cdot \vec{G}) - (\nabla \cdot \vec{F})\vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G}$

โดยในที่นี้

$$(\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} = G_1\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + G_2\frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + G_3\frac{\partial \vec{F}}{\partial z}$$

ทฤษฎีบท 11 (Laplacian Identities)

ถ้า f และ g เป็นสนามเชิงสเกลาร์ที่มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งต่อเนื่อง และ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นสนามเชิงเวกเตอร์ที่มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งต่อเนื่อง แล้ว

1. $\nabla^2(f + g) = \nabla^2 f + \nabla^2 g$
2. $\nabla^2(cf) = c\nabla^2 f$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
3. $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + 2\nabla f \cdot \nabla g + g\nabla^2 f$

ทฤษฎีบท 12 (Degree Two Identities)

ถ้า f และ g เป็นสนามเชิงสเกลาร์ที่มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งต่อเนื่อง และ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นสนามเชิงเวกเตอร์ที่มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งต่อเนื่อง แล้ว

1. $\nabla^2(f + g) = \nabla^2 f + \nabla^2 g$
2. $\nabla^2(cf) = c\nabla^2 f$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
3. $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + 2\nabla f \cdot \nabla g + g\nabla^2 f$

ภาคผนวก ข

การแปลงฮันเกล

บทนิยาม 5.1. ให้ $\mathtt{I} = [0, \infty)$ และ $f : \mathtt{I} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังชันค่าจริง แล้วการแปลงฮันเกล (Hankel transforms) ของฟังก์ชัน f นิยามโดย

$$\tilde{f}(\lambda, z) = \int_0^\infty \lambda\rho f(\lambda, z) J_0(\lambda\rho) d\rho \tag{1}$$

และ

$$f(\rho, z) = \int_0^\infty \tilde{f}(\rho, z) J_0(\lambda\rho) d\lambda \tag{2}$$

โดยที่ J_0 แทนฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 อันดับ 0 (Bessel function of the first kind of order 0) และ λ แทน ตัวแปรฮันเกล (Hankel variable)

โดยทั่วไป เราเรียกสมการ (1) ว่า การแปลงฮันเกล (Hankel transforms) และสมการ (2) ว่า การแปลงฮันเกลผกผัน (Inverse Hankel transforms)

ภาคผนวก ค

ฟังก์ชันเบสเซล

พิจารณาสมการเชิงินุพันธ์

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - v^2)y = 0$$

โดยที่ $v \in \mathbb{R}$ เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ข้างต้นว่า สมการเบสเซล อันดับ v (Bessel's equation of order v) และมีคำตอบทั่วไป คือ

$$y = AJ_v(x) + BY_v(x)$$

เมื่อ A และ B แทนตัวคงค่า และ

$$J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+v}}{2^{2k+v} \cdot k! \cdot \Gamma(k+v)}$$

โดยที่ Γ คือฟังก์ชันแกมมา (Gamma function) นิยามโดย $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ เมื่อ $z \in \mathbb{C}$ และ

$$Y_v(x) = \begin{cases} \frac{J_v(x)\cos(v\pi) - J_{-v}(x)}{\sin(v\pi)} & \text{ถ้า } v \notin \mathbb{Z} \\ \lim\limits_{v\to n} Y_v(x) & \text{ถ้า } x = n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

โดยทั่วไปเราเรียกว่า J_v ว่าฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 อันดับ v (Bessel function of the first kind of order v) และเรียก Y_v ว่าฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 2 อันดับ v (Bessel function of the second kind of order v)

สมบัติทั่วไปของฟังก์ชันเบสเซลมีดังนี้

1. รูปแบบเชิงเส้นกำกับ (Asymptotic forms) ของฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 อันดับ v

$$J_v(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

2. Integral representations

$$J_v(x) = \frac{(x/2)^v}{x^{1/2}\Gamma(v+1/2)} \int_0^{\pi} \cos(x\cos\theta)\sin^{2v}\theta d\theta$$

ถ้า v เป็นจำนวนเต็มบวก หรือ ศูนย์ จะได้ว่า

$$J_v(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - v\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(v\theta - x\sin\theta)}d\theta$$

3. ความสัมพันธ์เวียนเกิด (Recurrence relations) สำหรับฟังก์ชันเบสเซล

$$\begin{aligned}
xJ_{v-1}(x) - 2vJ_v(x) + xJ_{v+1}(x) &= 0 \\
xY_{v-1}(x) + 2vY_c(x) + xY_{v+1}(x) &= 0 \\
J_{v-1}(x) - J_{v+1}(x) &= 2J_v'(x) \\
Y_{v-1}(x) - Y_{v+1}(x) &= 2Y_v'(x) \\
J_v'(x) &= J_{v-1}(x) - \frac{v}{x}J_v(x) \\
J_v'(x) &= -J_{v+1}(x) + \frac{v}{x}J_v(x) \\
Y_v'(x) &= Y_{v-1}(x) - \frac{v}{x}Y_v(x) \\
Y_v'(x) &= -Y_{v+1}(x) + \frac{v}{x}Y_v(x)
\end{aligned}$$

ภาคผนวก ง

Kummer's function

เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง

$$z\frac{d^2w}{dz^2} + (b-z)\frac{dw}{dz} - aw = 0 \tag{1}$$

ว่า Kummer's equation ซึ่งสมการ (1) มีผลเฉลยทั่วไปทั่วไปทั้งหมดสองผลเฉลย
ผลเฉลยทั่วไปแรกมีอยู่สองผลเฉลย คือ

$$M(a,b,z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s}{(b)_s s!} z^s = 1 + \frac{a}{b}z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)2!}z^2 + \dots \tag{2}$$

เมื่อ $(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ

$$\mathsf{M}(a,b,z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s}{\Gamma(b+s)s!} z^s \tag{3}$$

โดยยกเว้น $M(a,b,z)$ ที่หาค่าไม่ได้เมื่อ b เป็นจำนวนเต็มลบหรือศูนย์ ซึ่งสังเกตว่า

$$M(a,b,z) = \Gamma(b)\mathsf{M}(a,b,z)$$

อักหนึ่งผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1) คือ $U(a,b,z)$ ซึ่งกำหนดได้ด้วยคุณสมบัติ

$$U(a,b,z) \sim z^{-a} \tag{4}$$

เมื่อ $z \to \infty, \|\mathrm{ph} z\| \leq \frac{3}{2}\pi - \delta$ โดยที่ $\delta > 0$ มีค่าน้อย ๆ ซึ่งหากว่า $a = 0, -1, -2, \dots$ แล้ว $U(a,b,z)$ สามารถเขียนได้ในรูปของสมการพหุนามดีกรี m

$$U(-m,b,z) = (-1)^m (b)_m M(-m,b,z) = (-1)^m \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} (b+s)_{m-s} (-z)^s$$

และถ้า $a-b+1=0,-1,-2,\ldots$ แล้ว

$$U\left(a,a+n+1,z\right)=\frac{(-1)^n(1-a-n)_n}{z^{a+n}}M\left(-n,1-a-n,z\right)=z^{-a}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(a)_s z^{-s}$$

และถ้า $b=n+1$ เมื่อ $n=0,1,2,\ldots$ และ $a\neq 0,-1,-2,\ldots$ แล้ว

$$\begin{aligned}U\left(a,n+1,z\right)=&\frac{(-1)^{n+1}}{n!\Gamma\left(a-n\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(n+1)_k k!}z^k\Big(\ln z+\psi\left(a+k\right)-\psi\left(1+k\right)\\&-\psi\left(n+k+1\right)\Big)+\frac{1}{\Gamma\left(a\right)}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)!(1-a+k)_{n-k}}{(n-k)!}z^{-k}\end{aligned}$$

และถ้า $b=n+1$ เมื่อ $n=0,1,2,\ldots$ และ $a=0,-1,-2,\ldots$ แล้ว

$$\begin{aligned}U\left(-m,n+1,z\right)&=(-1)^m(n+1)_m M\left(-m,n+1,z\right)\\&=(-1)^m\sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s}(n+s+1)_{m-s}(-z)^s\end{aligned}$$

และเมื่อ $b=0,-1,-2,\ldots$ แล้ว

$$U\left(a,-n,z\right)=z^{n+1}U\left(a+n+1,n+2,z\right)$$

ลิมิตเมื่อ $z\to 0$

$$M(a,b,z)=1+O(z) \tag{5}$$

และในกรณีถ้า $a=-n$ หรือ $-n+b-1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ แล้ว

$$U(-n,b,z)=(-1)^n(b)_n+O(z) \tag{6}$$

และ

$$U\left(-n+b-1,b,z\right)=(-1)^n(2-b)_n z^{1-b}+O\left(z^{2-b}\right) \tag{7}$$

และกรณีอื่น ๆ

$$U\left(a,b,z\right)=\frac{\Gamma\left(b-1\right)}{\Gamma\left(a\right)}z^{1-b}+O\left(z^{2-Re(b)}\right)\qquad\left(Re(b)\geq 2,\ b\neq 2\right)\tag{8}$$

$$U(a,2,z)=\frac{1}{\Gamma\left(a\right)}z^{-1}+O\left(\ln z\right)\tag{9}$$

$$U(a,b,z)=\frac{\Gamma\left(b-1\right)}{\Gamma\left(a\right)}z^{1-b}+\frac{\Gamma\left(1-b\right)}{\Gamma\left(a-b+1\right)}+O\left(z^{2-Re(b)}\right)\qquad\left(1\leq Re(b)<2,\ b\neq 1\right)\tag{10}$$

$$U(a,1,z)=-\frac{1}{\Gamma\left(a\right)}\left(\ln z+\psi\left(a\right)+2\gamma\right)+O\left(z\ln z\right)\tag{11}$$

$$U(a,b,z)=\frac{\Gamma\left(1-b\right)}{\Gamma\left(a-b+1\right)}+O\left(z^{1-Re(b)}\right)\qquad\left(0<Re(b)<1\right)\tag{12}$$

$$U(a,0,z)=\frac{1}{\Gamma\left(a+1\right)}+O\left(z\ln z\right)\tag{13}$$

$$U(a,b,z)=\frac{\Gamma\left(1-b\right)}{\Gamma\left(a-b+1\right)}+O\left(z\right)\qquad\left(Re(b)\leq 0,\ b\neq 0\right)\tag{14}$$

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	มธุลดา อยู่โพชนา
วัน เดือน ปี เกิด	20 พฤษภาคม 2538
สถานที่เกิด	โรงพยาบาลนครปฐม
วุฒิการศึกษา	พ.ศ. 2559 สำเร็จการระดับปริญญาตรีวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยศิลปากร พ.ศ. 2561 ศึกษาต่อระดับปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร
ที่อยู่ปัจจุบัน	36/1 หมู่ 4 ตำบลศรีมหาโพธิ์ อำเภอนครชัยศรี จังหวัดนครปฐม 73120
ผลงานตีพิมพ์	สนามแม่เหล็กของไฟฟ้ากระแสตรงจากพื้นดินเอกพันธุ์ 2 ชั้นที่มีแร่ธาตุรูปจานฝังอยู่ วิชาการบัณฑิตศึกษาระดับชาติครั้งที่ 10, 25-26 มิถุนายน 2563. หนังสือรวบรวมบทความบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร. นครปฐม. หน้า S289-S296.