การแจงนับเมทริกซ์สามแนวเฉียงซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บน Z_p^2

โดย

นางสาวโยษิตา ศรีเจริญ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์
มหาวิทยาลัยศิลปากร
ปีการศึกษา 2565

การแจงนับเมทริกซ์สามแนวเฉียงซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บน Z_p^2

โดย
นางสาวโยษิตา ศรีเจริญ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์
มหาวิทยาลัยศิลปากร
ปีการศึกษา 2565

ENUMERATION OF TRIDIAGONAL MATRICES WITH PRESCRIBED DETERMINANT OVER ${Z_P}^2$

By

MISS Yosita SRICHAROEN

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for Master of Science MATHEMATICS STUDY

Department of MATHEMATICS

Silpakorn University

Academic Year 2022

หัวข้อ	การแจงนับเมทริกซ์สามแนวเฉียงซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บน $Z_p{}^2$
โดย	นางสาวโยษิตา ศรีเจริญ
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก	รองศาสตราจารย์ ดร. สมพงค์ จิตต์มั่น

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

....คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นรงค์ ฉิมพาลี)

พิจารณาเห็นชอบโดย

....ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. จิตติศักดิ์ รักบุตร)

....อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก

(รองศาสตราจารย์ ดร. สมพงค์ จิตต์มั่น)

....ผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก

(ศาสตราจารย์ ดร. พัฒนี อุดมกะวานิช)

620720010 : คณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
คำสำคัญ : เมทริกซ์สามแนวเฉียง, ดีเทอร์มิแนนต์, จำนวนเต็มมอดุโล p, จำนวนเต็มมอดุโล p ยกกำลัง 2, การนับจำนวน

นางสาว โยษิตา ศรีเจริญ: การแจงนับเมทริกซ์สามแนวเฉียงซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บน Z_{p^2} อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : รองศาสตราจารย์ ดร. สมพงค์ จิตต์มั่น

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ศึกษาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์สามแนวเฉียงโดยเน้นการแจงนับเมทริกซ์สามแนวเฉียงซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บนริง Z_p และริง Z_{p^2} แสดงการนับจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บน Z_p และเมทริกซ์สามแนวเฉียงไม่เอกฐานซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บน Z_{p^2} ไว้อย่างครบถ้วนทุกกรณี นอกจากนี้ได้นำเสนอค่าขอบเขตของจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงเอกฐานซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บน Z_{p^2} ในส่วนสุดท้ายเป็นการนำเสนอการแจงนับเมทริกซ์สามแนวเฉียงรูปแบบพิเศษบางแบบบน Z_p และ Z_{p^2} ซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์

620720010 : Major MATHEMATICS STUDY

Keyword : Tridiagonal matices. Determinants. Integers modulo p. Integer modulo the square of p. Enumeration

MISS Yosita SRICHAROEN : Enumeration of Tridiagonal Matrices with Prescribed Determinant over Z_p^2 Thesis advisor : Associate Professor SOMPHONG JITMAN, Ph.D.

In this thesis, the determinants of tridiagonal matrices are studied. The main focus is the enumeration of tridiagonal matrices with prescribed determinant over the rings Z_p and Z_p^2. The number of tridiagonal matrices with prescribed determinant over Z_p and the number of non-singular tridiagonal matrices with prescribed determinant over Z_p^2 are completely determined. For singular tridiagonal matrices with prescribed determinant over Z_p^2, bounds on the number of tridiagonal matrices with prescribed determinant are given. Finally, the number of some special tridiagonal matrices with prescribed determinant over the rings Z_p and Z_p^2 is presented.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้จัดทำขึ้นเพื่อศึกษาการแจงนับเมทริกซ์สามแนวเฉียงซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บนริงของจำนวนเต็มมอดุโลจำนวนเฉพาะและจำนวนเต็มมอดุโลจำนวนเฉพาะยกกำลังสอง

ขอขอบคุณรองศาสตราจารย์ ดร.สมพงค์ จิตต์มั่น อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ผู้ให้ความรู้ ให้คำแนะนำ และช่วยเหลือในการศึกษาและจัดทำบทความนี้จนสำเร็จลุล่วงด้วยดีและขอขอบคุณศาสตราจารย์ ดร.พัฒนี อุดมกะวานิช และ รองศาสตราจารย์ ดร.จิตติศักดิ์ รักบุตร กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ผู้ให้คำแนะนำเพื่อให้บทความฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น ผู้จัดทำจึงขอกราบขอบพระคุณท่านเป็นอย่างสูง ณ ที่นี้ด้วย

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่ารายงานฉบับนี้จะเป็นประโยชน์แก่ผู้อ่านทุกท่าน

นางสาว โยษิตา ศรีเจริญ

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ

เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจและมีการนำมาประยุกต์ใช้ในหลายด้าน เช่น การใช้ดีเทอร์มิแนนต์ในการหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมโดยสูตรของฮีรอน (Heron's formula) [1] การหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ [2] การตรวจสอบการมีจริงของผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นบางแบบ [2] การแก้ระบบเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์ (Cramer's rule) [2] เป็นต้น นอกจากนี้ ดีเทอร์มิแนนต์เป็นเครื่องมือในการนิยามและศึกษาความไม่เอกฐานของเมทริกซ์ซึ่งเป็นสมบัติของเมทริกซ์ที่มีประโยชน์สำหรับการประยุกต์ใช้งานเมทริกซ์ในทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ใน [2] และ [3] เป็นต้น

ใน [4] ได้แสดงการนับจำนวนเมทริกซ์เอกฐานและเมทริกซ์ไม่เอกฐานบนฟีลด์จำกัดใน [5] ได้มีการขยายแนวคิดของ [4] เพื่อนับจำนวนเมทริกซ์ซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บน $\mathbb{Z}_m$ ซึ่งเป็นนัยทั่วไปของฟีลด์จำกัด $\mathbb{Z}_p$ หลังจากนั้นใน [6] มีการใช้เทคนิคที่ง่ายกว่าวิธีการ ใน [5] เพื่อนับจำนวนเมทริกซ์บน $\mathbb{Z}_m$ ผลการวิจัยข้างต้นได้ถูกขยายไปสู่ริงลูกโซ่จำกัดและริงไอดีลมุขสำคัญจำกัดใน [10] อีกทั้งยังนำเสนอสูตรชัดแจ้งของจำนวนเมทริกซ์ซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บนริงลูกโซ่จำกัดและริงไอดีลมุขสำคัญ นอกจากนี้มีการศึกษาการนับจำนวนเมทริกซ์ทแยงมุมซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บนริงลูกโซ่จำกัดและริงไอดีลมุขสำคัญใน **[3]** และนำไปประยุกต์เพื่อนับจำนวนเมทริกซ์วัฏจักรบางขนาดซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บนริงลูกโซ่จำกัดและริงไอดีลมุขสำคัญ

สำหรับริง R ซึ่งเป็นริงสลับที่มีเอกลักษณ์ 1 เรากล่าวว่าสมาชิก $a \in R$ เป็น*ยูนิต* (unit) ก็ต่อเมื่อ มี $b \in R$ ซึ่ง $ab=1$ และกล่าวว่าสมาชิก $a \in R-\{0\}$ เป็น*ตัวหารศูนย์* (zero-divisor) ก็ต่อเมื่อมี $b \in R-\{0\}$ ซึ่ง $ab=0$ จาก [7] และ [8] เราจะได้ว่าริงลูกโซ่จำกัดเป็นยูเนียนต่างสมาชิกของศูนย์ ตัวหารศูนย์ และยูนิต สมาชิกในริงทั้งสามชนิดนี้เป็นเครื่องมือสำคัญในการนับจำนวนเมทริกซ์ซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์ใน [9] , [10] และ [6]

ให้ R เป็นริงสลับที่มีเอกลักษณ์ 1 สำหรับแต่ละจำนวนนับ n เรากล่าวว่าเมทริกซ์ A ขนาด $n \times n$ บน R เป็นเมทริกซ์สามแนวเฉียง ก็ต่อเมื่อ แต่ละสมาชิกของ A ซึ่งไม่อยู่ในแนวทแยงมุมหลัก แนวทแยงล่างแนวทแยงมุมหลัก และแนวทแยงบนแนวทแยงมุมหลัก เป็นศูนย์ นั่นคือเมทริกซ์สามแนวเฉียงอยู่ในรูปแบบ

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ & & & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $a_{ij}\in R$ จะเห็นได้ว่าเมทริกซ์สามแนวเฉียงเป็นนัยทั่วไปของเมทริกซ์ทแยงมุม [7] สมบัติและการประยุกต์ใช้งานเมทริกซ์สามแนวเฉียงได้แก่ ค่าเฉพาะของเมทริกซ์สามแนวเฉียงสมมาตร ตัวผกผันของเมทริกซ์สามแนวเฉียงและการแก้ปัญหาค่าขอบ ได้มีการศึกษาและนำเสนอไว้ใน [11], [12] และ [13]

สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ให้ $T_n(R)$ แทนเซตของเมทริกซ์สามแนวเฉียงขนาด $n\times n$ บน R สำหรับแต่ละสมาชิก a ใน R ให้

$$T_n(R,a)=\{A\in T_n(R)\,|\,\det(A)=a\}$$

ในงานวิจัยนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์สามแนวเฉียงบนริง R เมื่อ R คือ ฟีลด์ $\mathbb{Z}_p$ หรือริง $\mathbb{Z}_{p^2}$ ซึ่งเป็นนัยทั่วไปของการศึกษาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ทแยงมุมใน [7] โดยมุ่งเน้นการนับจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงขนาด $n\times n$ เมื่อกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บนริง R โดยแบ่งการศึกษาเป็นกรณีดีเทอร์มิแนนต์เป็นศูนย์ ตัวหารศูนย์ และยูนิต ตามลำดับ โดยนำเสนอสูตรเชิงเวียนเกิดของ $|T_n(R,a)|$ และวิเคราะห์หาสูตรชัดแจ้งของ $|T_n(R,a)|$ สำหรับแต่ละสมาชิก $a\in R=\mathbb{Z}_p$ สำหรับกรณี $R=\mathbb{Z}_{p^2}$ เราได้แสดงสูตรของ $|T_n(R,a)|$ สำหรับยูนิต $a\in R$ และให้ค่าขอบเขตของ $|T_n(R,a)|$ ในกรณีที่ a เป็นศูนย์หรือตัวหารศูนย์ นอกจากนี้ได้นับจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงขนาด $n\times n$ รูปแบบเฉพาะบางแบบซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บนริง R เช่น

$$\begin{bmatrix} a_{11} & r & & & \\ r & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-1)(n-1)} & r \\ & & & r & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ และ } \begin{bmatrix} a_{11} & s & & & \\ r & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-1)(n-1)} & s \\ & & & r & a_{nn} \end{bmatrix}$$

เมื่อ r,s เป็นยูนิตใน R อีกด้วย ซึ่งปรากฏว่าจำนวนของเมทริกซ์รูปแบบพิเศษดังกล่าวเป็นอิสระจาก r และ s

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน

บทนี้เป็นการทบทวนความรู้พื้นฐานที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ สามารถอ่านเพิ่มเติมได้จาก [2] และ [9] ให้ m และ n เป็นจำนวนนับและ R เป็นริงสลับที่มีเอกลักษณ์ ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m\times n$ บน R ซึ่งเขียน A ในรูป

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $a_{ij}\in\mathbb{R}$ สำหรับทุก $1\le i\le m$ และ $1\le j\le n$ สำหรับแต่ละ $1\le i\le m$ เราจะเขียนแทน แถวที่ i ของ A ด้วย $R_i=\left[a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in}\right]$ และสำหรับแต่ละ $1\le j\le n$ เราจะเขียนแทนคอลัมน์ที่ j ของ A ด้วย

$$C_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

2.1 การดำเนินการแถวและคอลัมน์ขั้นมูลฐาน

การดำเนินการแถวขั้นมูลฐานบนเมทริกซ์ หมายถึง การดำเนินการแถวแบบใดแบบหนึ่งต่อไปนี้

1. [**การสับเปลี่ยน** (interchange)] สับเปลี่ยนแถวที่ p และแถวที่ q เขียนแทนด้วย $R_p\leftrightarrow R_q$
2. [**การแทนที่** (replacement)] เปลี่ยนแถวที่ p โดยนำค่าคงตัว c คูณแถวที่ $q\left(q\neq p\right)$ แล้วนำไปบวกกับแถวที่ p เขียนแทนด้วย $R_p+cR_q\to R_p$
3. [**การปรับมาตรา** (scaling)] คูณแถวที่ p ด้วยค่าคงตัว $c\neq 0$ เขียนแทนด้วย $cR_p\to R_p$

เราอาจเรียกการดำเนินการแถวขั้นมูลฐานสั้น ๆ ว่า “**การดำเนินการแถว**” และกล่าวว่า เมทริกซ์ B **สมมูลแถว** (row equivalent) กับเมทริกซ์ A ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากเมทริกซ์ A โดยการดำเนินการแถวกับเมทริกซ์ A

การดำเนินการคอลัมน์ขั้นมูลฐานบนเมทริกซ์ หมายถึง การดำเนินการคอลัมน์แบบใดแบบหนึ่งต่อไปนี้

1. [**การสับเปลี่ยน** (interchange)] สับเปลี่ยนคอลัมน์ที่ p และ คอลัมน์ที่ q เขียนแทนด้วย $C_p \leftrightarrow C_q$
2. [**การแทนที่** (replacement)] เปลี่ยนคอลัมน์ที่ p โดยนำค่าคงตัว c คูณคอลัมน์ที่ $q(q \neq p)$ แล้วนำไปบวกกับคอลัมน์ที่ p เขียนแทนด้วย $C_p + cC_q \to C_p$
3. [**การปรับมาตรา** (scaling)] คูณคอลัมน์ที่ p ด้วยค่าคงตัว $c \neq 0$ เขียนแทนด้วย $cC_p \to C_p$

เราอาจเรียกการดำเนินการคอลัมน์ขั้นมูลฐานสั้น ๆ ว่า “**การดำเนินการคอลัมน์**” และกล่าวว่าเมทริกซ์ B **สมมูลคอลัมน์** (column equivalent) กับเมทริกซ์ A ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากเมทริกซ์ A โดยการดำเนินการคอลัมน์กับเมทริกซ์ A และกล่าวว่า A สมมูลกับ B ก็ต่อเมื่อ A สมมูลแถวกับ B หรือ A สมมูลคอลัมน์กับ B ในกรณีนี้เขียนแทนด้วย $A \sim B$

2.2 กรุปและริง

สำหรับแต่ละริง R ซึ่งเป็นริงสลับที่และมีเอกลักษณ์ให้ $U(R)$ แทนเซตของยูนิตทั้งหมดใน R และให้ $ZD(R)$ แทนเซตของตัวหารศูนย์ทั้งหมดใน R จาก [8] เราได้สมบัติที่น่าสนใจเกี่ยวกับยูนิต และตัวหารศูนย์ในริง $\mathbb{Z}_p$ และ $\mathbb{Z}_{p^2}$ ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.1 [[8],Theorem 2.6] ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า

$$U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right) = \left\{a \in \mathbb{Z}_{p^2} \middle| p \nmid a\right\} \quad \text{และ} \quad \left|U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right| = p(p-1)$$

ทฤษฎีบทที่ 2.2 [[8],Theorem 2.8] ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า

$$ZD\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right) = \left\{a \notin \mathbb{Z}_{p^2} \middle| p|a \text{ โดยที่ } a \neq 0\right\} \quad \text{และ} \quad \left|ZD\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right| = p-1$$

จากสมบัติข้างต้นทำให้ได้ว่า $U\left(\mathbb{Z}_p\right) = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ และสรุปได้ว่า $\mathbb{Z}_p = U\left(\mathbb{Z}_p\right) \cup \{0\}$ และ $\mathbb{Z}_{p^2} = U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right) \cup ZD\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right) \cup \{0\}$ เป็นยูเนียนต่างสมาชิก

กรุปและทฤษฎีบทสมสัณฐานกรุปเป็นเครื่องมือในการศึกษาเมทริกซ์จาก [14] สมบัติที่สำคัญกล่าวโดยสรุปดังนี้

กำหนด $(G,\bullet)$ และ $(G',*)$ เป็นกรุปใด ๆ เรียกฟังก์ชัน $\theta: G \to G'$ ว่าเป็น **สาทิสสัณฐานกรุป** (group homomorphism) ก็ต่อเมื่อ $\theta(a \bullet b) = \theta(a) * \theta(b)$ สำหรับทุก $a,b \in G$ เรียกสาทิสสัณฐาน θ ว่า **สมสัณฐาน (isomorphism)** ก็ต่อเมื่อ θ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก G ทั่วถึง G' ในกรณีนี้เขียนแทนด้วย $G \cong G'$

เราเรียก $\ker(\theta) = \{ g \in G \mid \theta(g) = e' \}$ ว่า เคอร์เนล (kernel) ของสาทิสสัณฐานกรุป θ เมื่อ e' คือเอกลักษณ์ของ G'

จาก [14] ทฤษฎีบทสมสัณฐานกรุปที่ 1 สรุปได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.3 [[14], Theroem 3.6] ให้ G และ G' เป็นกรุปและให้ $\theta: G \to G'$ เป็นสาทิสสัณฐานกรุปแบบทั่วถึง จะได้ว่า $G / \ker(\theta) \cong G'$

2.3 เมทริกซ์สามแนวเฉียง

ให้ R เป็นริงสลับที่และมีเอกลักษณ์ให้ n เป็นจำนวนนับเรากล่าวว่าเมทริกซ์ A ขนาด $n \times n$ เป็นเมทริกซ์สามแนวเฉียงก็ต่อเมื่อ A อยู่ในรูปแบบ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ & & & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

และให้ $T_n(R)$ แทนเซตของเมทริกซ์สามแนวฉียงขนาด $n \times n$ ทั้งหมดบน R

จากบทนิยามเห็นได้ชัดว่า $T_n(R)$ เป็นกรุปสลับที่ภายใต้การบวกปกติของเมทริกซ์ สำหรับกรณี R เป็นริงจำกัดเราสรุป $|T_n(R)|$ ได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.4 ให้ n เป็นจำนวนนับและให้ R เป็นริงสลับที่จำกัดซึ่งมีเอกลักษณ์ จะได้ว่า

$$|T_n(R)| = |R|^{3n-2}$$

ให้ $IT_n(R) = \{ A \in T_n(R) \mid \det(A) \in U(R) \}$ และสำหรับแต่ละ $a \in R$ ให้ $T_n(R,a) = \{ A \in T_n(R) \mid \det(A) = a \}$ จะเห็นได้ชัดว่า $T_n(R) = \bigcup_{a \in R} T_n(R,a)$ เป็นยูเนียนแบบต่างสมาชิก

สำหรับแต่ละ $r, s \in R$ ให้

$$T_{n,r,s}(R) = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & s & & & \\ r & a_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-1)(n-1)} & s \\ & & & r & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| a_{ii} \in R \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \right\}$$

เป็นเซตของเมทริกซ์สามแนวเฉียงรูปแบบพิเศษสำหรับกรณี R เป็นริงจำกัด จะเห็นได้ชัดเจนว่า

$$|T_{n,r,s}(R)| = |R|^n$$

ให้ $IT_{n,r,s}(R) = \{A \in T_{n,r,s}(R) \mid \det(A) \in U(R)\}$ และสำหรับแต่ละ $a \in R$ ให้ $T_{n,r,s}(R,a) = \{A \in T_{n,r,s}(R) \mid \det(A) = a\}$

บทที่ 3
การแจงนับเมทริกซ์สามแนวเฉียงซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บนริงของจำนวนเต็มมอดุโลจำนวนเฉพาะ

ในบทนี้เราจะศึกษาจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บน $\mathbb{Z}_p$ พร้อมได้นำเสนอสูตรเชิงเวียนเกิดและสูตรชัดแจ้งของจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงขนาด $n\times n$ บน $\mathbb{Z}_p$ ซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์ในหัวข้อ 3.1 และสูตรการนับจำนวนเมทริกซ์สามแนวฉียงรูปแบบพิเศษซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์ในหัวข้อ 3.2

ในเบื้องต้นเราพิจารณาจำนวนของเมทริกซ์สามแนวเฉียงขนาด $n\times n$ บน $\mathbb{Z}_p$ โดยทฤษฎีบทที่ 2.4 ทำให้เราได้จำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงขนาด $n\times n$ บน $\mathbb{Z}_p$ ในบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรกที่ 3.1 ให้ n เป็นจำนวนนับและให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า

$$\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| = p^{3n-2}$$

ตัวอย่างที่ 3.1 เมทริกซ์สามแนวเฉียงและจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงขนาด $n\times n$ บน $\mathbb{Z}_3$ สำหรับ $n=2,3,4$ แสดงได้ดังนี้

1) $T_2\left(\mathbb{Z}_3\right) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \middle| a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ และ

$$\left|T_2\left(\mathbb{Z}_3\right)\right| = 3^4$$

2) $T_3\left(\mathbb{Z}_3\right) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \middle| a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33} \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ และ

$$\left|T_3\left(\mathbb{Z}_3\right)\right| = 3^7$$

3) $T_4\left(\mathbb{Z}_3\right) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \middle| a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{43}, a_{44} \in \mathbb{Z}_3 \right\}$

และ

$$\left|T_3\left(\mathbb{Z}_3\right)\right| = 3^{10}$$

3.1 การแจงนับเมทริกซ์สามแนวเฉียงซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บนริงของจำนวนเต็มมอดุโลจำนวนเฉพาะ

ในหัวข้อนี้จะแสดงการหาสูตรเชิงเวียนเกิดและสูตรชัดแจ้งของจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงขนาด $n\times n$ บน $\mathbb{Z}_p$ ซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์ สำหรับทุกจำนวนนับ n และทุกจำนวนเฉพาะ p

ในเบื้องต้นเราพิจารณาจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงไม่เอกฐานขนาด $n\times n$ สำหรับกรณี $n=1$ และ $n=2$ เราได้ว่าเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ เป็นเมทริกซ์สามแนวเฉียงเสมอโดย [[12], Theorem 1] ทำให้เราได้ $\left|IT_1(\mathbb{Z}_p)\right|$ และ $\left|IT_2(\mathbb{Z}_p)\right|$ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบที่ 3.2 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า

$$\left|IT_1(\mathbb{Z}_p)\right| = p-1 \text{ และ } \left|IT_2(\mathbb{Z}_p)\right| = (p^2-1)p(p-1)$$

ต่อไปเป็นการนำเสนอสูตรเวียนเกิดของ $\left|IT_n(\mathbb{Z}_p)\right|$ ซึ่งเป็นจำนวนของเมทริกซ์สามแนวเฉียงไม่เอกฐานขนาด $n\times n$ บน $\mathbb{Z}_p$

ทฤษฎีบทที่ 3.3 ให้ n เป็นจำนวนนับและให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า

$$\left|IT_1(\mathbb{Z}_p)\right| = p-1,\ \left|IT_2(\mathbb{Z}_p)\right| = (p^2-1)p(p-1)$$

และ

$$\left|IT_n(\mathbb{Z}_p)\right| = p^2(p-1)\cdot\left|IT_{n-1}(\mathbb{Z}_p)\right| + (p-1)^2\cdot p^3\cdot\left|IT_{n-2}(\mathbb{Z}_p)\right|$$

สำหรับ $n\geq 3$

บทพิสูจน์ สำหรับ $n=1$ และ $n=2$ จะได้ว่า $\left|IT_1(\mathbb{Z}_p)\right| = p-1$ และ $\left|IT_2(\mathbb{Z}_p)\right| = (p^2-1)p(p-1)$ โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 3.2

สมมติให้ $n\geq 3$ และให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ & & & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix} \in IT_n(\mathbb{Z}_p)$$

แบ่งการพิจารณาเป็น 2 กรณี คือ กรณีที่ 1 $a_{nn} = 0$ และกรณีที่ 2 $a_{nn} \neq 0$ ดังนี้

กรณีที่ 1 $a_{nn} \neq 0$ โดยการดำเนินการบนตามแถวและคอลัมน์ขั้นมูลฐาน

$$R_{n-1} - a_{(n-1)n} a_{nn}^{-1} R_n \to R_{n-1}$$

และ

$$C_{n-1} - a_{n(n-1)} a_{nn}^{-1} C_n \to C_{n-1}$$

บนเมทริกซ์ A จะได้เมทริกซ์

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & \ddots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} & \\ & & & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} - a_{(n)(n-1)} a_{(n-1)(n)} a_{nn}{}^{-1} & 0 \\ & & & & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ซึ่ง $A \sim B$ และ

$$\det(A) = \det(B)$$

$$= a_{nn} \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} \\ & & & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} - a_{(n)(n-1)} a_{(n-1)(n)} a_{nn}{}^{-1} \end{bmatrix} \right)$$

ดังนั้น $\det(A) \neq 0$ ก็ต่อเมื่อ

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} \\ & & & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} - a_{(n)(n-1)} a_{(n-1)(n)} a_{nn}{}^{-1} \end{bmatrix} \right) \neq 0$$

ให้

$$S=\left\{\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & & & \\ s_{21} & s_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & s_{(n-2)(n-2)} & s_{(n-2)(n-1)} \\ & & & s_{(n-1)(n-2)} & s_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}\in T_{n-1}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|$$

$$\left.\det\left(\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & & & \\ s_{21} & s_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & s_{(n-2)(n-2)} & s_{(n-2)(n-1)} \\ & & & s_{(n-1)(n-2)} & s_{(n-1)(n-1)}-a_{n(n-1)}a_{(n-1)n}a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}\right)\neq 0\right\}$$

เห็นได้ชัดเจนว่า $|S|=\left|IT_{n-1}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} \\ & & & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)}-a_{(n)(n-1)}a_{(n-1)(n)}a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}\in IT_{n-1}\left(\mathbb{Z}_p\right)$$

ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} \\ & & & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}\in S$$

นั่นคือ $A\in IT_n\left(\mathbb{Z}_p\right)$ ก็ต่อเมื่อ $a_{(n-1)(n)},a_{(n)(n-1)}\in\mathbb{Z}_p$ และ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} \\ & & & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}\in S$$

เนื่องจากค่าของ a_{nn} มี $p-1$ แบบ ค่าของแต่ละ $a_{(n-1)(n)}$ และ $a_{(n)(n-1)}$ มี p แบบ และจำนวนของเมริกซ์

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} \\ & & & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}$$

คือ $|S| = \left|IT_{n-1}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|$ ทำให้ได้ว่าจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียง A ขนาด $n \times n$ บน $\mathbb{Z}_p$ ซึ่ง $a_{nn} \neq 0$ และ $\det\left(A\right) \neq 0$ คือ

$$p^2\left(p-1\right) \cdot \left|IT_{n-1}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| \tag{2.1}$$

กรณีที่ 2 $a_{nn} = 0$ จะได้ว่า

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ & & & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ & & & a_{n(n-1)} & 0 \end{bmatrix}$$

ทำให้ได้ว่า $\det\left(A\right) = -a_{(n-1)(n)}a_{(n)(n-1)}\det\left(A'\right)$ เมื่อ

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-3)(n-3)} & a_{(n-3)(n-2)} \\ & & & a_{(n-2)(n-3)} & a_{(n-2)(n-2)} \end{bmatrix}$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $\det(A)\neq 0$ ก็ต่อเมื่อ $a_{(n-1)n}\neq 0, a_{n(n-1)}\neq 0$ และ $\det(A')\neq 0$ เนื่องจาก $a_{(n-1)(n-2)}, a_{(n-2)(n-1)}, a_{(n-1)(n-1)}\in\mathbb{Z}_p,\quad a_{(n-1)n}, a_{n(n-1)}\in\mathbb{Z}_p-\{0\}$ และ $A'\in IT_{n-2}(\mathbb{Z}_p)$ ทำให้ได้ว่าจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียง A ขนาด $n\times n$ บน $\mathbb{Z}_p$ ซึ่ง $a_{nn}=0$ และ $\det(A)\neq 0$ คือ

$$(p-1)^2\cdot p^3\cdot\left|IT_{n-2}(\mathbb{Z}_p)\right| \tag{2.2}$$

จาก (2.1) และ (2.2) จะได้ว่า

$$\left|IT_n(\mathbb{Z}_p)\right| = p^2(p-1)\cdot\left|IT_{n-1}(\mathbb{Z}_p)\right| + (p-1)^2\cdot p^3\cdot\left|IT_{n-2}(\mathbb{Z}_p)\right|$$

ตามต้องการ ■

สูตรเวียนเกิดของ $\left|IT_n(\mathbb{Z}_p)\right|$ ในทฤษฎีบทที่ 3.3 เป็นเครื่องมือสำคัญในการหาสูตรชัดแจ้งในทฤษฎีบทถัดไป

ทฤษฎีบทที่ 3.4 ให้ n เป็นจำนวนนับและให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า

$$\left|IT_n(\mathbb{Z}_p)\right| = (x_1)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left((p^2-1)p-x_2\right)}{x_1-x_2}\right)+(x_2)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left((p^2-1)p-x_1\right)}{x_2-x_1}\right)$$

เมื่อ $x_1=\dfrac{(p-1)}{2}\left(p^2+\sqrt{p^4+4p^3}\right)$ และ $x_2=\dfrac{(p-1)}{2}\left(p^2-\sqrt{p^4+4p^3}\right)$

บทพิสูจน์ ให้ $a_n=\left|IT_n(\mathbb{Z}_p)\right|$ จากทฤษฎีบทประกอบที่ 3.2 จะได้ว่า $a_1=p-1$ และ

$$a_2=(p^2-1)p(p-1)$$

และ

$$a_n = p^2(p-1)\cdot a_{n-1}+(p-1)^2\cdot p^3\cdot a_{n-2} \tag{2.3}$$

สำหรับ $n\geq 3$ เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์ซึ่งมีสมการลักษณะเฉพาะ

$$x^2 = p^2(p-1)\cdot x+(p-1)^2\cdot p^3 \tag{2.4}$$

นั่นคือ

$$x^2-p^2(p-1)\cdot x-(p-1)^2\cdot p^3=0$$

ทำให้ได้ว่า

$$x = \frac{p^2(p-1) \pm \sqrt{\left(p^2(p-1)\right)^2 + 4(p-1)^2 \cdot p}}{2}$$

$$= \frac{\left(p^3 - p^2\right) \pm \sqrt{p^6 + 2p^5 - 7p^4 + 4p^3}}{2}$$

$$= \frac{\left(p^3 - p^2\right) \pm \sqrt{p^3\left(p^3 + 2p^2 - 7p + 4\right)}}{2}$$

$$= \frac{p^2(p-1) \pm \sqrt{p^3(p-1)^2(p+4)}}{2}$$

$$= \frac{p^2(p-1) \pm p(p-1)\sqrt{p(p+4)}}{2}$$

$$= \frac{(p-1)}{2}\left(p^2 \pm \sqrt{p^4 + 4p^3}\right)$$

เนื่องจาก $p > 0$ จึงได้ว่า $p^4 + 4p^3 > 0$ ทำให้ได้ว่า (2.3) มีผลเฉลยจำนวนจริงสองผลเฉลยแตกต่างกันคือ $x_1 = \frac{(p-1)}{2}\left(p^2 + \sqrt{p^4 + 4p^3}\right)$ และ $x_2 = \frac{(p-1)}{2}\left(p^2 - \sqrt{p^4 + 4p^3}\right)$

จะได้ว่า

$$a_n = r_1 x_1^{\,n} + r_2 x_2^{\,n} \tag{2.5}$$

สำหรับบางจำนวนจริง r_1 และ r_2

แทนค่า $a_1 = p-1$ และ $a_2 = \left(p^2 - 1\right)p(p-1)$ ใน (2.5) จะได้ว่า

$$p - 1 = r_1 x_1 + r_2 x_2 \tag{2.6}$$

$$\left(p^2 - 1\right)p(p-1) = r_1 x_1^{\,2} + r_2 x_2^{\,2} \tag{2.7}$$

ตามลำดับ

คูณ (2.6) ด้วย x_1 จะได้ว่า

$$x_1(p-1) = r_1 x_1^{\,2} + x_1 x_2 r_2 \tag{2.8}$$

จาก (2.8) – (2.7) จะได้ว่า

$$\left(p-1\right)x_1-\left(p^2-1\right)p\left(p-1\right)=r_2\left(x_1x_2-x_2{}^2\right)$$

เนื่องจาก $x_1 \neq x_2$ ทำให้ได้ว่า

$$r_2=\frac{\left(p-1\right)x_1-\left(p^2-1\right)p\left(p-1\right)}{x_1x_2-x_2{}^2}$$

แทนค่า $r_2=\frac{\left(p-1\right)x_1-\left(p^2-1\right)p\left(p-1\right)}{x_1x_2-x_2{}^2}$ ใน (2.6) จะได้ว่า

$$p-1=r_1x_1+x_2\left(\frac{\left(p-1\right)x_1-\left(p^2-1\right)p\left(p-1\right)}{x_1x_2-x_2{}^2}\right)$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}
r_1x_1&=p-1-\left(\frac{\left(p-1\right)x_1-\left(p^2-1\right)p\left(p-1\right)}{x_1-x_2}\right)\\
&=\left(p-1\right)\left(x_1-x_2\right)-\left(\frac{\left(p-1\right)x_1-\left(p^2-1\right)p\left(p-1\right)}{x_1-x_2}\right)\\
&=\frac{\left(p-1\right)x_1-\left(p-1\right)x_2-\left(\left(p-1\right)x_1-\left(p^2-1\right)p\left(p-1\right)\right)}{x_1-x_2}\\
&=\frac{\left(p-1\right)x_1-\left(p-1\right)x_2-\left(p-1\right)x_1+\left(p^2-1\right)p\left(p-1\right)}{x_1-x_2}\\
&=\frac{-\left(p-1\right)x_2+\left(p^2-1\right)p\left(p-1\right)}{x_1-x_2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
r_1&=\frac{-\left(p-1\right)x_2+\left(p^2-1\right)p\left(p-1\right)}{x_1{}^2-x_1x_2}\\
&=\frac{\left(p^2-1\right)p\left(p-1\right)-\left(p-1\right)x_2}{x_1{}^2-x_1x_2}
\end{aligned}$$

จาก (2.5) จึงสรุปได้ว่า

$$a_n = (x_1)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left((p^2-1)p - x_2\right)}{x_1 - x_2}\right) + (x_2)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left((p^2-1)p - x_1\right)}{x_2 - x_1}\right)$$

เมื่อ $x_1 = \dfrac{(p-1)}{2}\left(p^2 + \sqrt{p^4 + 4p^3}\right)$ และ $x_2 = \dfrac{(p-1)}{2}\left(p^2 - \sqrt{p^4 + 4p^3}\right)$

การพิสูจน์เสร็จสมบูรณ์ ■

จากจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงไม่เอกฐานในทฤษฎีบทที่ 3.4 ทำให้เราสรุปจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงเอกฐานในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.5 ให้ n เป็นจำนวนนับและให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า

$$\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p, 0\right)\right| = p^{3n-2} - (x_1)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left((p^2-1)p - x_2\right)}{x_1 - x_2}\right) + (x_2)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left((p^2-1)p - x_1\right)}{x_2 - x_1}\right)$$

เมื่อ $x_1 = \dfrac{(p-1)}{2}\left(p^2 + \sqrt{p^4 + 4p^3}\right)$ และ $x_2 = \dfrac{(p-1)}{2}\left(p^2 - \sqrt{p^4 + 4p^3}\right)$

บทพิสูจน์ จากบทแทรกที่ 3.1 และทฤษฎีบทที่ 3.4 ได้ว่า $\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| = p^{3n-2}$ และ

$$\left|IT_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| = (x_1)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left((p^2-1)p - x_2\right)}{x_1 - x_2}\right) + (x_2)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left((p^2-1)p - x_1\right)}{x_2 - x_1}\right)$$

ตามลำดับทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p, 0\right)\right| &= \left|T_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| - \left|IT_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| \\ &= p^{3n-2} - (x_1)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left((p^2-1)p - x_2\right)}{x_1 - x_2}\right) + (x_2)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left((p^2-1)p - x_1\right)}{x_2 - x_1}\right)\end{aligned}$$

ตามต้องการ ■

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $p = 2$ เราสามารถคำนวณจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงไม่เอกฐานขนาด $n \times n$ บน $\mathbb{Z}_p$ ได้โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 3.4 เพื่อให้เห็นขั้นตอนชัดเจนขึ้นพิจารณาความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้ แทน $p = 2$ ใน (2.3) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$a_n = 2^2(2-1)\cdot a_{n-1} + (2-1)^2 \cdot 2^3 \cdot a_{n-2} = 4\cdot a_{n-1} + 8\cdot a_{n-2}$$

ซึ่งมี $x^2 - 4x - 8 = 0$ เป็นสมการเฉพาะที่มีรากคือ

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 1\cdot(-8)}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{3}$$

ทำให้ได้ว่า

$$a_n = r_1\left(2+2\sqrt{3}\right)^n + r_2\left(2-2\sqrt{3}\right)^n \tag{2.9}$$

เนื่องจาก $IT_1(\mathbb{Z}_2) = \{a_{11} \mid a_{11} \in \mathbb{Z}_2 - \{0\}\} = \{[1]\}$ ทำให้ได้ว่า $a_1 = |IT_1(\mathbb{Z}_2)| = 1$

เนื่องจาก $IT_2(\mathbb{Z}_2) = \left\{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \middle| a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{Z}_2\right\}$

$$= \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\right\}$$

ทำให้ได้ว่า $a_2 = |IT_2(\mathbb{Z}_2)| = 6$

แทนค่า $a_1 = 1$ และ $a_2 = 6$ ใน (2.9) จะได้ว่า

$$1 = r_1\left(2+2\sqrt{3}\right) + r_2\left(2-2\sqrt{3}\right) \tag{2.10}$$

$$6 = r_1\left(2+2\sqrt{3}\right)^2 + r_2\left(2-2\sqrt{3}\right)^2 = r_1\left(16+8\sqrt{3}\right) + r_2\left(16-8\sqrt{3}\right) \tag{2.11}$$

นำ $2+2\sqrt{3}$ คูณในสมการที่ (2.10) จะได้ว่า

$$2+2\sqrt{3} = r_1\left(16+8\sqrt{3}\right) - 8r_2 \tag{2.12}$$

จาก (2.11) – (2.12) จะได้ว่า

$$6 - \left(2+2\sqrt{3}\right) = r_2\left(16-8\sqrt{3}\right) + 8r_2$$

จัดรูปจะได้ว่า

$$4 - 2\sqrt{3} = 24r_2 - 8\sqrt{3}r_2 = \left(24-8\sqrt{3}\right)r_2$$

นั่นคือ

$$r_2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{\left(24-8\sqrt{3}\right)} = \frac{2-\sqrt{3}}{12-4\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{24}$$

แทน $r_2 = \dfrac{3-\sqrt{3}}{24}$ ใน (2.12) จะได้ $r_1 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{24}$

ดังนั้น

$$a_n = \frac{3+\sqrt{3}}{24}\left(2+2\sqrt{3}\right)^n + \frac{3-\sqrt{3}}{24}\left(2-2\sqrt{3}\right)^n$$

$$= \frac{3+2\sqrt{3}}{6}\left(2+2\sqrt{3}\right)^{n-1} + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}\left(2-2\sqrt{3}\right)^{n-1}$$

$$a_1 = 1,\ a_2 = 6,\ a_3 = 32,\ a_4 = 176,\ldots,a_n = \frac{3+\sqrt{3}}{24}\left(2+2\sqrt{3}\right)^n + \frac{3-\sqrt{3}}{24}\left(2-2\sqrt{3}\right)^n$$

ต่อไปเราจะแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p, a\right)\right|$ และ $\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p, 1\right)\right|$ เพื่อนำไปใช้ในการหา $\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p, a\right)\right|$ เมื่อ a เป็นยูนิตใน $\mathbb{Z}_p$ ต่อไป

ทฤษฎีบทประกอบที่ 3.6 ให้ n เป็นจำนวนนับและให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า

$$\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p, a\right)\right| = \left|T_n\left(\mathbb{Z}_p, 1\right)\right|$$

สำหรับทุก $a \in \mathbb{Z}_p - \{0\}$

บทพิสูจน์ ให้ $a \in \mathbb{Z}_p - \{0\}$ และนิยาม $\alpha : T_n\left(\mathbb{Z}_p, 1\right) \to T_n\left(\mathbb{Z}_p, a\right)$ โดย

$$\alpha(A) = \operatorname{diag}(a, 1, \ldots, 1)A$$

ให้ $A \in T_n\left(\mathbb{Z}_p, 1\right)$ จะได้ว่า

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ & & & a_{(n+1)n} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

สำหรับบาง $a_{ij} \in \mathbb{Z}_p$ และ $\det(A) = 1$

จาก $\alpha(A)=\operatorname{diag}(a,1,\dots,1)A$ จะได้ว่า

$$\alpha(A)=\begin{bmatrix} a & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ & & & a_{(n+1)n} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a\cdot a_{11} & a\cdot a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ & & & a_{(n+1)n} & a_{nn} \end{bmatrix}\in T_n(\mathbb{Z}_p)$$

เนื่องจาก $\det(A)=1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\det(\alpha(A)) &= \det(\operatorname{diag}(a,1,\dots,1))\cdot\det(A)\\ &= a\det(A)\\ &= a(1)\end{aligned}$$

ดังนั้น $$\det(\alpha(A))=a$$

เพราะฉะนั้น $\alpha(A)\in T_n(\mathbb{Z}_p,a)$ ดังนั้น α เป็นฟังก์ชันจาก $T_n(\mathbb{Z}_p,1)$ ไป $T_n(\mathbb{Z}_p,a)$

ต่อไปจะแสดงว่า α เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ให้ $A,B\in T_n(\mathbb{Z}_p,1)$ สมมติให้ $\alpha(A)=\alpha(B)$ นั่นคือ

$$\operatorname{diag}(a,1,\dots,1)A=\operatorname{diag}(a,1,\dots,1)B$$

เนื่องจาก $a\in\mathbb{Z}_p-\{0\}$ ทำให้มี $a^{-1}\in\mathbb{Z}_p$ และ

$$A=\operatorname{diag}(a^{-1},1,\dots,1)\operatorname{diag}(a,1,\dots,1)A=\operatorname{diag}(a^{-1},1,\dots,1)\operatorname{diag}(a,1,\dots,1)B=B$$

ดังนั้น α เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ต่อไปจะแสดงว่า α เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ให้ $B \in T_n\left(\mathbb{Z}_p, a\right)$ จะได้ว่า

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & & & \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & & \\ & b_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{(n-1)n} \\ & & & b_{(n+1)n} & b_{nn} \end{bmatrix}$$

สำหรับบาง $b_{ij} \in \mathbb{Z}_p$

ให้

$$A = \begin{bmatrix} a^{-1} \cdot b_{11} & a^{-1} \cdot b_{12} & & & \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & & \\ & b_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{(n-1)n} \\ & & & b_{(n+1)n} & b_{nn} \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $A \in T_n\left(\mathbb{Z}_p\right)$ และ $\det(A) = a^{-1}\det(B) = a^{-1} \cdot a = 1$ ทำให้ได้ว่า $A \in T_n\left(\mathbb{Z}_p, 1\right)$ และ

$$\begin{aligned} \alpha(A) &= \operatorname{diag}(a,1,\ldots,1)A \\ &= \begin{bmatrix} a & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{-1} \cdot b_{11} & a^{-1} \cdot b_{12} & & & \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & & \\ & b_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{(n-1)n} \\ & & & b_{(n+1)n} & b_{nn} \end{bmatrix} \\ &= B \end{aligned}$$

ดังนั้น α เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

เพราะฉะนั้น $\alpha : T_n\left(\mathbb{Z}_p, 1\right) \to T_n\left(\mathbb{Z}_p, a\right)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง ทำให้ได้ว่า

$$\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p, 1\right)\right| = \left|T_n\left(\mathbb{Z}_p, a\right)\right|$$

ตามต้องการ ■

ทฤษฎีบทที่ 3.7 ให้ n เป็นจำนวนนับ ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และให้ $a \in \mathbb{Z}_p - \{0\}$ จะได้ว่า

$$\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p, a\right)\right| = \left(x_1\right)^{n-1}\left(\frac{\left(p^2-1\right)p - x_2}{x_1 - x_2}\right) + \left(x_2\right)^{n-1}\left(\frac{\left(p^2-1\right)p - x_1}{x_2 - x_1}\right)$$

เมื่อ $x_1 = \frac{(p-1)}{2}\left(p^2 + \sqrt{p^4 + 4p^3}\right)$ และ $x_2 = \frac{(p-1)}{2}\left(p^2 - \sqrt{p^4 + 4p^3}\right)$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก

$$IT_n\left(\mathbb{Z}_p\right) = \bigcup_{a \in U\left(\mathbb{Z}_p\right)} T_n\left(\mathbb{Z}_p, a\right)$$

เป็นยูเนี่ยนต่างสมาชิก โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 3.6 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left|IT_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| &= \left|\bigcup_{a \in U\left(\mathbb{Z}_p\right)} T_n\left(\mathbb{Z}_p, a\right)\right| \\ &= \sum_{a \in U\left(\mathbb{Z}_p\right)} \left|T_n\left(\mathbb{Z}_p, a\right)\right| \\ &= \sum_{a \in U\left(\mathbb{Z}_p\right)} \left|T_n\left(\mathbb{Z}_p, 1\right)\right| \\ &= (p-1)\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p, 1\right)\right|\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p, a\right)\right| = \frac{\left|IT_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|}{p-1} \tag{2.13}$$

โดยทฤษฎีบทที่ 3.4 ได้ว่า

$$\left|IT_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| = \left(x_1\right)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left(\left(p^2-1\right)p - x_2\right)}{x_1 - x_2}\right) + \left(x_2\right)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left(\left(p^2-1\right)p - x_1\right)}{x_2 - x_1}\right)$$

และโดย (2.13) ทำให้ได้ว่า

$$\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p,a\right)\right|=\frac{\left|IT_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|}{p-1}$$

$$=\frac{\left(x_1\right)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left(\left(p^2-1\right)p-x_2\right)}{x_1-x_2}\right)+\left(x_2\right)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left(\left(p^2-1\right)p-x_1\right)}{x_2-x_1}\right)}{p-1}$$

$$=\left(x_1\right)^{n-1}\left(\frac{\left(p^2-1\right)p-x_2}{x_1-x_2}\right)+\left(x_2\right)^{n-1}\left(\frac{\left(p^2-1\right)p-x_1}{x_2-x_1}\right)$$

ตามต้องการ ■

ตารางต่อไปนี้แสดงค่าของ $\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|,\left|IT_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|$, $\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p,0\right)\right|$, $\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p,a\right)\right|$ สำหรับ $p=2,3,5$ เมื่อ $a\neq 0$ ซึ่งคำนวณโดยใช้สูตรในบทแทรกที่ 3.1, ทฤษฎีบทที่ 3.4, ทฤษฎีบทที่ 3.5 และทฤษฎีบทที่ 3.7 ตามลำดับ

สำหรับ $p=2$ และ $n=1,2,3,\ldots,10$

p	n	$\left\|T_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right\|$	$\left\|IT_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right\|$	$\left\|T_n\left(\mathbb{Z}_p,0\right)\right\|$	$\left\|T_n\left(\mathbb{Z}_p,a\right)\right\|,a\neq 0$
2	1	2	1	1	1
2	2	16	6	10	6
2	3	128	32	96	32
2	4	1,024	176	848	176
2	5	8,192	960	7,232	960
2	6	65,536	5,248	60,288	5,248
2	7	524,288	28,672	495,616	28,672
2	8	4,194,304	156,672	4,037,632	156,672
2	9	33,554,432	856,064	32,698,368	856,064
2	10	268,435,456	4,677,632	263,757,824	4,677,632

สำหรับ $p=3$ และ $n=1,2,3,\ldots,8$

p	n	$\left\|T_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right\|$	$\left\|IT_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right\|$	$\left\|T_n\left(\mathbb{Z}_p,0\right)\right\|$	$\left\|T_n\left(\mathbb{Z}_p,a\right)\right\|, a\neq 0$
3	1	3	2	1	1
3	2	81	48	33	24
3	3	2,187	1,080	1,107	540
3	4	59,049	24,624	34,425	12,312
3	5	1,594,323	559,872	1,034,451	279,936
3	6	43,046,721	12,737,088	30,309,633	6,368,544
3	7	1,162,261,467	289,733,760	872,527,707	144,866,880
3	8	31,381,059,609	6,590,813,184	24,790,246,425	3,295,406,592

สำหรับ $p=5$ และ $n=1,2,3,4,5$

p	n	$\left\|T_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right\|$	$\left\|IT_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right\|$	$\left\|T_n\left(\mathbb{Z}_p,0\right)\right\|$	$\left\|T_n\left(\mathbb{Z}_p,a\right)\right\|, a\neq 0$
5	1	5	4	1	1
5	2	625	48	577	12
5	3	78,125	8,800	69,325	2,200
5	4	9,765,625	976,000	8,789,625	244,000
5	5	1,220,703,125	115,200,000	1,105,503,125	28,800,000

3.2 การแจงนับเมทริกซ์สามแนวเฉียงรูปแบบพิเศษซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บนริงของจำนวนเต็มมอดุโลจำนวนเฉพาะ

ในหัวข้อนี้เราจะนำเสนอการแจงนับเมทริกซ์สามแนวเฉียงรูปแบบพิเศษซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บน $\mathbb{Z}_p$ ดังนี้

สำหรับ $r,s\in\mathbb{Z}_p$ ให้

$$T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)=\left\{\begin{bmatrix} a_1 & s & & & & \\ r & a_2 & s & & & \\ & r & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & a_{(n-1)} & s \\ & & & & r & a_n \end{bmatrix} \middle| a_i\in\mathbb{Z}_p\right\}$$

ทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้จะสามารถวิเคราะห์ได้โดยตรวจจากบทนิยามของ $T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)$

ทฤษฎีบทประกอบที่ 3.8 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะให้ n เป็นจำนวนนับและให้ $r,s\in\mathbb{Z}_p$ จะได้ว่า

$$\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| = p^n$$

ให้ $IT_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)=\left\{A\in T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\middle|\det(A)\neq 0\right\}$ สำหรับแต่ละ $a\in\mathbb{Z}_p$ ให้

$$T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p,a\right)=\left\{A\in T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\middle|\det(A)=a\right\}$$

สำหรับกรณี $r=0$ หรือ $s=0$ การนับจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงรูปแบบดังกล่าวซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์ให้ผลเช่นเดียวกับการนับจำนวนเมทริกซ์ทแยงมุมบน $\mathbb{Z}_p$ ซึ่งมีการศึกษาไว้แล้วในทฤษฎีบทประกอบที่ 3.4 ใน [7]

ทฤษฎีบทที่ 3.9 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะให้ n เป็นจำนวนนับและให้ $r,s\in\mathbb{Z}_p$ ซึ่ง $r=0$ หรือ $s=0$ จะได้ว่า

$$T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p,a\right)=T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p,1\right)=(p-1)^{n-1}$$

และ

$$T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)=T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},1\right)=(p-1)^{n-1}\ p^{n-1}$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงว่ากรณี $r\neq 0$ และ $s\neq 0$ ผลลัพธ์เชิงการนับของ $\left|IT_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|$ เป็นอิสระจาก r และ s

ทฤษฎีบทที่ 3.10 ให้ n เป็นจำนวนนับและให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $r,s\in\mathbb{Z}_p-\{0\}$ จะได้ว่า $\left|IT_{1,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|=p-1,$ $\left|IT_{2,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|=p^2-p+1$ และ

$$\left|IT_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|=(p-1)\cdot\left|IT_{n-1,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|+p\cdot\left|IT_{n-2,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|$$

สำหรับ $n\geq 3$

บทพิสูจน์ สำหรับ $n=1$ และ $n=2$ จะได้ว่า

$$\left|IT_{1,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|=\left|IT_1\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|=\left|\left\{[x_1]\middle|\det([x_1])\neq 0\right\}\right|=p-1$$

และ

$$\left|IT_{2,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| = \left|\left\{\begin{bmatrix} x_1 & s \\ r & x_2 \end{bmatrix} \middle| \det\left(\begin{bmatrix} x_1 & s \\ r & x_2 \end{bmatrix}\right) \neq 0\right\}\right|$$

$$= \left|\left\{x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_p \middle| x_1 x_2 \neq rs\right\}\right|$$

$$= \left|\mathbb{Z}_{p^2} \setminus \left\{x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_p \middle| x_1 x_2 = rs\right\}\right|$$

$$= p^2 - (p-1)(1)$$

นั่นคือ $\left|IT_{2,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| = p^2 - p + 1$

สมมติให้ $n \geq 3$ และให้

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & s & & & & \\ r & x_2 & s & & & \\ & r & x_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & x_{(n-1)} & s \\ & & & & r & x_n \end{bmatrix} \in T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)$$

แบ่งการพิจารณาเป็น 2 กรณีคือ กรณีที่ 1 $x_n = 0$ และกรณีที่ 2 $x_n \neq 0$ ดังนี้

กรณีที่ 1 $x_n \neq 0$ โดยการดำเนินการตามแถวแบบ $R_{n-1} - s x_n^{-1} R_n \to R_{n-1}$ และการดำเนินการตามคอลัมน์แบบ $C_{n-1} - r x_n^{-1} C_n \to C_{n-1}$ บน X จะได้เมทริกซ์

$$Y = \begin{bmatrix} x_1 & s & & & & \\ r & x_2 & s & & & \\ & r & x_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & x_{(n-1)} - r \cdot s \cdot x^{-n} & 0 \\ & & & & 0 & x_n \end{bmatrix}$$

ซึ่ง $X \sim Y$ และ

$$\det(X) = \det(Y) = x_n \det\left(\begin{bmatrix} x_1 & s & & & \\ r & x_2 & s & & \\ & r & x_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & s \\ & & & r & x_{(n-1)} - r \cdot s \cdot x_n^{-1} \end{bmatrix}\right)$$

ดังนั้น $\det(X) \neq 0$ ก็ต่อเมื่อ $\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & s & & & \\ r & x_2 & s & & \\ & r & x_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & s \\ & & & r & x_{(n-1)} - r \cdot s \cdot x_n^{-1} \end{bmatrix}\right) \neq 0$

ให้

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} v_1 & s & & & \\ r & v_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & v_{(n-2)} & s \\ & & & r & v_{(n-1)} \end{bmatrix} \in T_{n-1,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right) \middle| \det\left(\begin{bmatrix} v_1 & s & & & \\ r & v_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & v_{(n-2)} & s \\ & & & r & v_{(n-1)} - r \cdot s \cdot x_n^{-1} \end{bmatrix}\right) \neq 0 \right\}$$

เห็นได้ชัดว่า $|V| = \left|IT_{n-1,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|$ และทำให้ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x_1 & s & & & \\ r & x_2 & s & & \\ & r & x_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & s \\ & & & r & x_{(n-1)} - r \cdot s \cdot x_n^{-1} \end{bmatrix} \in IT_{n-1,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)$$

ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{bmatrix} x_1 & s & & & \\ r & x_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & x_{(n-2)} & s \\ & & & r & x_{(n-1)} \end{bmatrix} \in V$$

นั่นคือ $X \in IT_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)$ ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{bmatrix} x_1 & s & & & \\ r & x_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & x_{(n-2)} & s \\ & & & r & x_{(n-1)} \end{bmatrix} \in V$$

เนื่องจากค่าที่เป็นไปได้ของ x_n คือ $p-1$ จึงได้ว่าจำนวนเมทริกซ์ X ซึ่ง $x_n \neq 0$ และ $\det(X) \neq 0$ คือ

$$(p-1)\cdot|V| = (p-1)\cdot\left|IT_{n-1,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| \tag{4.1}$$

กรณีที่ 2 $x_n = 0$ จะได้ว่า

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & s & & & & \\ r & x_2 & s & & & \\ & r & x_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & x_{n-1} & s \\ & & & & r & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & s & & & & \\ r & x_2 & s & & & \\ & r & x_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & x_{n-1} & s \\ & & & & r & 0 \end{bmatrix}$$

และ $\det(X) = s\cdot r\det(X')$ เมื่อ $X' = \begin{bmatrix} x_1 & s & & & \\ r & x_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & x_{n-3} & s \\ & & & r & x_{n-2} \end{bmatrix}$

ทำให้ได้ว่า $\det(X) \neq 0$ ก็ต่อเมื่อ $\det(X') \neq 0$ นั่นคือ $x_{n-1} \in \mathbb{Z}_p$ และ $X' \in IT_{n-2,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)$

ดังนั้นจำนวนเมทริกซ์ X ซึ่ง $x_n = 0$ และ $\det(X) \neq 0$ คือ

$$p\cdot\left|IT_{n-2,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| \tag{4.2}$$

จาก (4.1) + (4.2) จะได้ว่า

$$\left|IT_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| = (p-1)\cdot\left|IT_{n-1,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| + p\cdot\left|IT_{n-2,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|$$

ตามต้องการ ■

จากสูตรเวียนเกิดของ $\left|IT_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|$ ในทฤษฎีบทที่ 3.10 เราสามารถแสดงสูตรชัดแจ้งในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.11 ให้ n เป็นจำนวนนับและให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า

$$\left|IT_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| = \frac{p^{n+1}+(-1)^n}{1+p}$$

บทพิสูจน์ ให้ $c_n = \left|IT_{(n,r,s)}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|$ จากทฤษฎีบทที่ 3.10 ได้ว่า $c_1 = p-1,\ c_2 = p^2-p+1$ และ

$$c_n = (p-1)\cdot c_{n-1} + p\cdot c_{n-2}$$

สำหรับ $n \geq 3$ เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์ซึ่งมีสมการลักษณะเฉพาะ

$$c^2 = (p-1)\cdot c + p \tag{4.3}$$

นั่นคือ

$$c^2 - (p-1)\cdot c - p = 0$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} c &= \frac{(p-1)\pm\sqrt{(p-1)^2+4p}}{2} \\ &= \frac{(p-1)\pm\sqrt{p^2-2p+1+4p}}{2} \\ &= \frac{(p-1)\pm\sqrt{p^2+2p+1}}{2} \\ &= \frac{(p-1)\pm\sqrt{(p+1)^2}}{2} \\ &= \frac{(p-1)\pm(p+1)}{2} \end{aligned}$$

นั่นคือ (4.3) มีผลเฉลยสองผลเฉลยที่แตกต่างกัน $c_1 = p$ และ $c_2 = -1$ จะได้

$$c_n = r_1 p^n + r_2(-1)^n$$

แทนค่า $c_1 = p-1$ และ $c_2 = p^2-p+1$ จะได้ว่า

$$p-1=r_1p-r_2 \tag{4.4}$$
$$p^2-p+1=r_1p^2+r_2 \tag{4.5}$$

จาก (4.4) + (4.5) จะได้ว่า

$$p^2=r_1p+r_1p^2$$
$$=r_1\left(p+p^2\right)$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$r_1=\frac{p^2}{\left(p+p^2\right)}$$
$$=\frac{p}{p+1}$$

แทน $r_1=\dfrac{p}{p+1}$ ใน (4.4) จะได้ว่า

$$p-1=r_1p-r_2$$
$$=\left(\frac{p}{p+1}\right)p-r_2$$
$$=\frac{p^2}{p+1}-r_2$$

ทำให้ได้ว่า

$$r_2=\frac{p^2}{p+1}-\left(p-1\right)$$
$$=\frac{p^2}{p+1}-\frac{\left(p-1\right)\left(p+1\right)}{p+1}$$
$$=\frac{p^2}{p+1}-\frac{p^2-1}{p+1}$$
$$=\frac{1}{p+1}$$

ดังนั้น

$$c_n = \frac{p^{n+1} + (-1)^n}{1+p}$$

ตามต้องการ ■

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นเครื่องมือสำคัญในการนับจำนวนเมทริกซ์ใน $T_{n,r,s}(\mathbb{Z}_p, a)$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่และ $a \in \mathbb{Z}_p - \{0\}$

ทฤษฎีบทที่ 3.12 ให้ n เป็นจำนวนนับและให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $r, s \in \mathbb{Z}_p$ ถ้า n เป็นจำนวนคี่ แล้ว

$$\left|T_{n,r,s}(\mathbb{Z}_p, a)\right| = \left|T_{n,r,s}(\mathbb{Z}_p, 1)\right|$$

สำหรับทุก $a \in \mathbb{Z}_p - \{0\}$

บทพิสูจน์ สมมติให้ n เป็นจำนวนคี่ ให้ $a \in \mathbb{Z}_p - \{0\}$ และ

$$\phi : T_{n,r,s}(\mathbb{Z}_p, 1) \longrightarrow T_{n,r,s}(\mathbb{Z}_p, a)$$

นิยามโดย

$$\phi\left(\begin{bmatrix} a_1 & s & & & & \\ r & a_2 & s & & & \\ & r & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & a_{n-1} & s \\ & & & & r & a_n \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} a & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & a & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & s & & & & \\ r & a_2 & s & & & \\ & r & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & a_{n-1} & s \\ & & & & r & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & a^{-1} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a^{-1} & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a\cdot a_1 & a\cdot s & & & & \\ r & a_2 & s & & & \\ & a\cdot r & a\cdot a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & a\cdot s & \\ & & & r & a_{n-1} & s \\ & & & & ar & aa_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & a^{-1} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a^{-1} & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a\cdot a_1 & s & & & & \\ r & a^{-1}\cdot a_2 & s & & & \\ & r & a\cdot a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & a^{-1}\cdot a_{n-1} & s \\ & & & & r & a\cdot a_n \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก n เป็นจำนวนคี่และ

$$\phi\left(\begin{bmatrix} a_1 & s & & & & \\ r & a_2 & s & & & \\ & r & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & a_{(n-1)} & s \\ & & & & r & a_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a\cdot a_1 & s & & & & \\ r & a^{-1}\cdot a_2 & s & & & \\ & r & a\cdot a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & a^{-1}\cdot a_{n-1} & s \\ & & & & r & a\cdot a_n \end{bmatrix} \in T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)$$

ทำให้ได้ว่า

$$\det\left(\phi\left(\begin{bmatrix} a_1 & s & & & & \\ r & a_2 & s & & & \\ & r & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & a_{(n-1)} & s \\ & & & & r & a_n \end{bmatrix}\right)\right) = a^{\frac{n+1}{2}}\cdot 1\cdot\left(a^{-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} = a$$

ดังนั้น

$$\phi\left(\begin{bmatrix} a_1 & s & & & & \\ r & a_2 & s & & & \\ & r & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & a_{(n-1)} & s \\ & & & & r & a_n \end{bmatrix}\right) \in T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p, a\right)$$

ให้

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & s & & & & \\ r & x_2 & s & & & \\ & r & x_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & x_{(n-1)} & s \\ & & & & r & x_n \end{bmatrix} \in T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p, a\right)$$

ได้ว่า $\det\left(X\right) = a$ เลือก

$$Y = \begin{bmatrix} a^{-1} & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & a^{-1} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & a^{-1} \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & a & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$Y = \begin{bmatrix} a^{-1}\cdot x_1 & a^{-1}\cdot s & & & & \\ r & x_2 & s & & & \\ & a^{-1}\cdot r & a^{-1}\cdot x_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & a^{-1}\cdot s & \\ & & & r & x_{(n-1)} & s \\ & & & & a^{-1}\cdot r & a^{-1}\cdot a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & a & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{-1}\cdot x_1 & s & & & & \\ r & a\cdot x_2 & s & & & \\ & r & a^{-1}x_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & a\cdot x_{(n-1)} & s \\ & & & & r & a^{-1}\cdot x_n \end{bmatrix} \in T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)$$

และ $\det(Y)=\left(a^{-1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot a\cdot\left(a\ \right)^{\frac{n-1}{2}}=1$ ดังนั้น $Y\in T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p,1\right)$ และ

$$\phi(Y)=\begin{bmatrix} a &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && a &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& 1 & \\ &&&&& a \end{bmatrix} Y \begin{bmatrix} 1 &&&&& \\ & a^{-1} &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& a^{-1} & \\ &&&&& 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && a &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& 1 & \\ &&&&& a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^{-1} &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && a^{-1} &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& 1 & \\ &&&&& a^{-1} \end{bmatrix}$$

$$X\begin{bmatrix} 1 &&&&& \\ & a &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& a & \\ &&&&& 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 &&&&& \\ & a^{-1} &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& a^{-1} & \\ &&&&& 1 \end{bmatrix}$$

$$=X$$

ดังนั้น ϕ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ $X,Y\in T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p,1\right)$ สมมติให้ $\phi(X)=\phi(Y)$ นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} a &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && a &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& 1 & \\ &&&&& a \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} a &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && a &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& 1 & \\ &&&&& a \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 &&&&& \\ & a^{-1} &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& a^{-1} & \\ &&&&& 1 \end{bmatrix} Y \begin{bmatrix} 1 &&&&& \\ & a^{-1} &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& a^{-1} & \\ &&&&& 1 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$X = \begin{bmatrix} a^{-1} & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & a^{-1} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & a & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & a \end{bmatrix}$$

$$X \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & a^{-1} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a^{-1} & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & a & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{-1} & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & a^{-1} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & a & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & a \end{bmatrix}$$

$$Y \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & a^{-1} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a^{-1} & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & a & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $X = Y$ ทำให้ได้ว่า ϕ ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เพราะฉะนั้น ϕ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p, a\right)\right| = \left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p, 1\right)\right|$$

ตามต้องการ ■

จากทฤษฎีบทที่ 3.11 และทฤษฎีบทที่ 3.12 เราสามารถสรุป $\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p,a\right)\right|$ สำหรับ $a\in\mathbb{Z}_p-\{0\}$ และจำนวนนับคี่ n ดังแสดงในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.13 ให้ n เป็นจำนวนนับให้ $r,s\in\mathbb{Z}_p-\{0\}$ และให้ $a\in\mathbb{Z}_p-\{0\}$ ถ้า n เป็นจำนวนคี่ แล้ว $\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p,a\right)\right|=\dfrac{p^{n+1}-1}{p^2-1}$

บทพิสูจน์ สมมติให้ n เป็นจำนวนคี่ เนื่องจาก

$$IT_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)=\bigcup_{b\in U\left(\mathbb{Z}_p\right)}T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p,b\right)$$

เป็นยูเนียนแบบต่างสมาชิก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left|IT_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|&=\left|\bigcup_{a\in U\left(\mathbb{Z}_p\right)}T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p,b\right)\right|\\&=\sum_{b\in U\left(\mathbb{Z}_p\right)}\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p,b\right)\right|\\&=(p-1)\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p,1\right)\right|\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบทที่ 3.11 และทฤษฎีบทที่ 3.12 ทำให้ได้ว่า

$$\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p,a\right)\right|=\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p,1\right)\right|=\frac{\left|IT_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|}{(p-1)}=\frac{p^{n+1}+(-1)^n}{p^2-1}=\frac{p^{n+1}-1}{p^2-1}$$

ตามต้องการ ■

จากการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์พบว่า สำหรับ n ซึ่งเป็นจำนวนคู่ $\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p,a\right)\right|$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p,1\right)\right|$ เช่น

$$\left|T_{4,1,1}\left(\mathbb{Z}_3,1\right)\right|=35\neq 26=\left|T_{4,1,1}\left(\mathbb{Z}_3,2\right)\right|$$

และ

$$\left|T_{6,1,1}\left(\mathbb{Z}_3,1\right)\right|=295\neq 313=\left|T_{6,1,1}\left(\mathbb{Z}_3,2\right)\right|$$

เป็นต้น จากข้อสังเกตนี้ จะเห็นได้ว่าการหาค่า $T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p,a\right)$ จะทำได้ซับซ้อนขึ้นซึ่งจะไม่กล่าวถึงในวิทยานิพนธ์นี้

จากทฤษฎีบทที่ 3.11 และทฤษฎีบทประกอบที่ 3.8 เราจะได้ว่า

$$\left|IT_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| = \frac{p^{n+1}+(-1)^n}{1+p}$$

และ $\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| = p^n$ ตามลำดับ เมื่อต้องการคำนวน $\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p,0\right)\right|$ สามารถทำได้ต้องแสดงในบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรกที่ 3.14 ให้ n เป็นจำนวนนับ และ $r,s \in \mathbb{Z}_p - \{0\}$ จะได้ว่า

$$\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p,0\right)\right| = \left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| - \left|IT_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| = p^n - \frac{p^{n+1}+(-1)^n}{1+p}$$

สำหรับ $p=3, r=1, s=1$ และ $n=1,3,5,7,9$ ผลลัพธ์เชิงคำนวณแสดงในตารางต่อไปนี้

p	n	$\left\|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right\|$	$\left\|IT_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right\|$	$\left\|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p,0\right)\right\|$	$\left\|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p,a\right)\right\|, a \neq 0$
3	1	3	2	1	1
3	3	27	20	7	10
3	5	243	182	61	91
3	7	2187	1640	547	820
3	9	19683	14762	4921	7381

บทที่ 4
การแจงนับเมทริกซ์สามแนวเฉียงซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บนริงของจำนวนเต็มมอดุโลจำนวนเฉพาะยกกำลังสอง

ในบทนี้เป็นการแจงนับเมทริกซ์สามแนวเฉียงซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บนริง $\mathbb{Z}_{p^2}$ ซึ่งนำเสนอสูตรชัดแจ้งของเมทริกซ์สามแนวเฉียงไม่เอกฐานขนาด $n\times n$ ซึ่งกำหนดค่าดีแนนต์บนริง $\mathbb{Z}_{p^2}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n และทุกจำนวนเฉพาะ p นอกจากนี้ยังได้นำเสนอค่าขอบเขตของจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงเอกฐานขนาด $n\times n$ ซึ่งกำนหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บนริง $\mathbb{Z}_{p^2}$ อีกด้วย

จำนวนของเมทริกซ์สามแนวเฉียงขนาด $n\times n$ บนริง $\mathbb{Z}_{p^2}$ สามารถคำนวนโดยทฤษฎีบทที่ 2.4 ดังแสดงในบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรกที่ 4.1 ให้ n เป็นจำนวนนับและ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า $\left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right| = p^{2(3n-2)}$

ตัวอย่างที่ 4.1 เมทริกซ์และจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงขนาด $n\times n$ บน $\mathbb{Z}_{3^2}$ สำหรับ $n = 2,3,4$ แสดงได้ดังนี้

1) $T_2\left(\mathbb{Z}_{3^2}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \middle| a_{11,} a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{Z}_{3^2} \right\}$ และ

$$\left|T_2\left(\mathbb{Z}_{3^2}\right)\right| = 3^8$$

2) $T_3\left(\mathbb{Z}_{3^2}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \middle| a_{11,} a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33} \in \mathbb{Z}_{3^2} \right\}$ และ

$$\left|T_3\left(\mathbb{Z}_{3^2}\right)\right| = 3^{14}$$

3) $T_4\left(\mathbb{Z}_{3^2}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \middle| a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{43}, a_{44} \in \mathbb{Z}_{3^2} \right\}$

และ

$$\left|T_3\left(\mathbb{Z}_{2^2}\right)\right| = 3^{20}$$

4.1 การแจงนับเมทริกซ์สามแนวเฉียงซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บนริงของจำนวนเต็มมอดุโลจำนวนเฉพาะยกกำลังสอง

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงการแจงนับเมทริกซ์สามแนวเฉียงซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บน $\mathbb{Z}_{p^2}$ โดยเริ่มจากการแสดงสูตรชัดแจ้งของ $\left|IT_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right|$ สำหรับทุกจำนวนนับ n และทุกจำนวนเฉพาะ p

ทฤษฎีบทที่ 4.1 ให้ n เป็นจำนวนนับและให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า $\left|IT_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right|$

$$= p^{3n-2}\cdot\left(\left(x_1\right)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left(\left(p^2-1\right)p-x_2\right)}{x_1-x_2}\right)+\left(x_2\right)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left(\left(p^2-1\right)p-x_1\right)}{x_2-x_1}\right)\right)$$

เมื่อ $x_1=\dfrac{(p-1)}{2}\left(p^2+\sqrt{p^4+4p^3}\right)$ และ $x_2=\dfrac{(p-1)}{2}\left(p^2-\sqrt{p^4+4p^3}\right)$

บทพิสูจน์ ให้ $\varphi: T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\to T_n\left(\mathbb{Z}_p\right)$ นิยามโดย

$$\varphi(A)=A(\operatorname{mod} p)$$

จะได้ว่า φ เป็นฟังก์ชันทั่วถึงซึ่ง $\varphi(A+B)=\varphi(A)+\varphi(B)$ นั่นคือ φ เป็นสาทิสสัณฐานกรุป โดยทฤษฎีบทที่ 2.3 จะได้ว่า

$$T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)/\ker(\varphi)\cong T_n\left(\mathbb{Z}_p\right)$$

เมื่อ
$$\ker(\varphi)=\left\{A\in T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\middle|\varphi(A)=[0]\right\}$$

ทำให้ได้ว่า
$$\frac{\left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right|}{\left|\ker(\varphi)\right|}=\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|$$

$$\left|\ker(\varphi)\right|=\frac{\left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right|}{\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|}=\frac{p^{2(3n-2)}}{p^{3n-2}}=p^{3n-2}$$

โดยบทนิยามของ φ เห็นได้ชัดเจนว่า $\det(\varphi(A)) \equiv \det(A) (\bmod p)$ ทำให้ได้ว่า $A \in IT_n(\mathbb{Z}_{p^2})$ ก็ต่อเมื่อ $\varphi(A) \in IT_n(\mathbb{Z}_p)$

ดังนั้น

$$\frac{\left|IT_n(\mathbb{Z}_{p^2})\right|}{\left|IT_n(\mathbb{Z}_p)\right|} = \left|\ker(\varphi)\right| = p^{3n-2}$$

โดยทฤษฎีบทที่ 3.4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&\left|IT_n(\mathbb{Z}_{p^2})\right| \\
&\quad = p^{3n-2}\left|IT_n(\mathbb{Z}_p)\right| \\
&\quad = p^{3n-2}\left((x_1)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left((p^2-1)p-x_2\right)}{x_1-x_2}\right)+(x_2)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left((p^2-1)p-x_1\right)}{x_2-x_1}\right)\right)
\end{aligned}$$

ตามต้องการ ■

ต่อไปจะแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\left|T_n(\mathbb{Z}_{p^2},a)\right|$ และ $\left|T_n(\mathbb{Z}_{p^2},1)\right|$ ซึ่งจะเป็นเครื่องมือสำหรับการคำนวณ $\left|T_n(\mathbb{Z}_{p^2},a)\right|$ เมื่อ $a \in U(\mathbb{Z}_{p^2})$ ต่อไป

ทฤษฎีบทที่ 4.2 ให้ n เป็นจำนวนนับ ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า

$$\left|T_n(\mathbb{Z}_{p^2},a)\right| = \left|T_n(\mathbb{Z}_{p^2},1)\right|$$

สำหรับทุก $a \in U(\mathbb{Z}_{p^2})$

บทพิสูจน์ ให้ $a \in U(\mathbb{Z}_{p^2})$ และ $\alpha : T_n(\mathbb{Z}_{p^2},1) \to T_n(\mathbb{Z}_{p^2},a)$ นิยามโดย

$$\alpha(A) = \operatorname{diag}(a,1,\ldots,1)A$$

ให้ $A \in T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},1\right)$ จะได้ว่า

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ & & & a_{(n+1)n} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

สำหรับบาง $a_{ij} \in \mathbb{Z}_{p^2}$ และ $\det(A)=1$

จาก $\alpha(A)=\operatorname{diag}(a,1,\ldots,1)A$ จะได้ว่า

$$\alpha(A)=\begin{bmatrix} a & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ & & & a_{(n+1)n} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a\cdot a_{11} & a\cdot a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ & & & a_{(n+1)n} & a_{nn} \end{bmatrix}\in T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$$

เนื่องจาก $\det(A)=1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\det(\alpha(A)) &= \det(\operatorname{diag}(a,1,\ldots,1))\cdot\det(A)\\ &= a\det(A)\\ &= a(1)\\ &= a\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $A \in T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)$ ซึ่งทำให้ได้ว่า α เป็นฟังก์ชันจาก $T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},1\right)$ ไป $T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)$

จะแสดงว่า α ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ให้ $A,B \in T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},1\right)$ สมมติให้ $\alpha(A)=\alpha(B)$ นั่นคือ

$$\operatorname{diag}(a,1,\ldots,1)A=\operatorname{diag}(a,1,\ldots,1)B$$

จาก $\det\left(\operatorname{diag}\left(a,1,\ldots,1\right)\right)=a\in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ ทำให้มี $a^{-1}\in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ และ

$$A=\operatorname{diag}\left(a^{-1},1,\ldots,1\right)\operatorname{diag}\left(a,1,\ldots,1\right)A=\operatorname{diag}\left(a^{-1},1,\ldots,1\right)\operatorname{diag}\left(a,1,\ldots,1\right)B=B$$

ดังนั้น α เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & & & \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & & \\ & b_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{(n-1)n} \\ & & & b_{(n+1)n} & b_{nn} \end{bmatrix}\in T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)$$

จะได้ว่า $\det\left(B\right)=a$

ให้

$$A=\begin{bmatrix} a^{-1}\cdot b_{11} & a^{-1}\cdot b_{12} & & & \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & & \\ & b_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{(n-1)n} \\ & & & b_{(n+1)n} & b_{nn} \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $A\in T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ และ

$$\begin{aligned}\det\left(A\right)&=a^{-1}\det\left(B\right)\\&=a^{-1}\cdot a\\&=1\end{aligned}$$

ดังนั้น $A\in T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},1\right)$ และ

$$\begin{aligned}\alpha\left(A\right)&=\operatorname{diag}\left(a,1,\ldots,1\right)A\\&=\begin{bmatrix} a & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^{-1}\cdot b_{11} & a^{-1}\cdot b_{12} & & & \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & & \\ & b_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{(n-1)n} \\ & & & b_{(n+1)n} & b_{nn} \end{bmatrix}\\&=B\end{aligned}$$

ดังนั้น α เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

เพราะฉะนั้น $\alpha : T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},1\right) \to T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},1\right)\right| = \left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)\right|$$

ตามต้องการ ■

สูตรการนับจำนวนเมทริกซ์สามแนวฉียงขนาด $n \times n$ ซึ่งดีเทอร์มิแนนต์เท่ากับ $a \in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ ได้แสดงไว้ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4.3 ให้ n เป็นจำนวนนับ ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า

$$\left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)\right| = p^{3n-3}\cdot\left(x_1\right)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left(\left(p^2-1\right)p-x_2\right)}{x_1-x_2}\right)+\left(x_2\right)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left(\left(p^2-1\right)p-x_1\right)}{x_2-x_1}\right)$$

สำหรับทุก $a \in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$

เมื่อ $x_1 = \dfrac{(p-1)}{2}\left(p^2+\sqrt{p^4+4p^3}\right)$ และ $x_2 = \dfrac{(p-1)}{2}\left(p^2-\sqrt{p^4+4p^3}\right)$

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบทที่ 4.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left|IT_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right| &= \left|\bigcup_{a\in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)} T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)\right| \\ &= \sum_{a\in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)}\left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)\right| \\ &= \sum_{a\in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)}\left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},1\right)\right| \\ &= \left|U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right|\cdot\left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},1\right)\right|\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบทที่ 4.1 และทฤษฎีบทที่ 2.1 ทำให้ได้ว่า

$$\left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}, b\right)\right| = \frac{\left|IT_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right|}{\left|U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right|}$$

$$= \frac{p^{3n-2}\left(\left(x_1\right)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left(\left(p^2-1\right)p-x_2\right)}{x_1-x_2}\right)+\left(x_2\right)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left(\left(p^2-1\right)p-x_1\right)}{x_2-x_1}\right)\right)}{p(p-1)}$$

$$= \frac{p^{3n-2}\left(\left(x_1\right)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left(\left(p^2-1\right)p-x_2\right)}{x_1-x_2}\right)+\left(x_2\right)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left(\left(p^2-1\right)p-x_1\right)}{x_2-x_1}\right)\right)}{p(p-1)}$$

$$= p^{3n-3}\left(\left(x_1\right)^{n-1}\left(\frac{\left(p^2-1\right)p-x_2}{x_1-x_2}\right)+\left(x_2\right)^{n-1}\left(\frac{\left(p^2-1\right)p-x_1}{x_2-x_1}\right)\right)$$

ตรงตามต้องการ ■

สำหรับเมทริกซ์สามแนวฉียงเอกฐานขนาด $n \times n$ บน $\mathbb{Z}_{p^2}$ ซึ่งมีค่าดีเทอร์มิแนนต์ท่ากับ 0 เราได้แสดงค่าขอบเขตล่างของ $\left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}, 0\right)\right|$ ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 4.4 ให้ n เป็นจำนวนนับและให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}, 0\right)\right| \geq\ & p^5(p-1)\cdot\left|IT_{n-1}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right| + p^{3n-4}\cdot\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p, 0\right)\right| \\ & + p^2(p-1)\cdot\left(p^{2(3n-2)} - p^{3n-2}\left|IT_{n-1}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|\right)\end{aligned}$$

บทพิสูจน์ ให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ & & & a_{(n+1)n} & a_{nn} \end{bmatrix} \in T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}, 0\right)$$

แบ่งการพิจารณาเป็น 3 กรณีคือ กรณีที่ 1 $a_{nn} \in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ กรณีที่ 2 $a_{nn}, a_{(n-1)n} \notin U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ และกรณีที่ 3 $a_{nn} \notin U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ และ $a_{(n-1)n} \in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$

กรณีที่ 1 $a_{nn} \in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ โดยการดำเนินการตามแถวและตามคอลัมน์ขั้นมูลฐานแบบ

$$R_{n-1} - a_{(n-1)n}a_{nn}^{-1}R \to R_{n-1}$$

และ

$$C_{n-1} - a_{n(n-1)}a_{nn}^{-1}C_n \to C_{n-1}$$

จะได้ว่า

$$A \sim B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & \ddots & & \\ & & & a_{(n-1)(n-1)} - a^{-1}{}_{nn}a_{(n-1)n}a_{n(n-1)} & 0 \\ & & & 0 & a_{(n-1)n} \end{bmatrix}$$

และ

$$\det(A) = \det(B)$$

$$= a_{nn} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ddots & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} \\ & & & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} - a_{(n)(n-1)}a_{(n-1)(n)}a_{nn}{}^{-1} \end{bmatrix}\right)$$

เนื่องจาก $a_{nn} \in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ จึงได้ว่า

$\det(A) = 0$ ก็ต่อเมื่อ

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} \\ & & & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} - a_{(n)(n-1)}a_{(n-1)(n)}a_{nn}{}^{-1} \end{bmatrix}\right) = 0$$

ให้

$$S=\left\{\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & & & \\ s_{21} & s_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & s_{(n-2)(n-2)} & s_{(n-2)(n-1)} \\ & & & s_{(n-1)(n-2)} & s_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \in T_{n-1}\left(\mathbb{Z}_p\right) \middle| \right.$$

$$\left. \det\left(\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & & & \\ s_{21} & s_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & s_{(n-2)(n-2)} & s_{(n-2)(n-1)} \\ & & & s_{(n-1)(n-2)} & s_{(n-1)(n-1)}-a_{n(n-1)}a_{(n-1)n}a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}\right)\neq 0\right\}$$

เห็นได้ชัดว่า $|S|=\left|IT_{n-1}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right|$ และ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} \\ & & & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)}-a_{(n)(n-1)}a_{(n-1)(n)}a_{nn}{}^{-1} \end{bmatrix} \in T_{n-1}\left(\mathbb{Z}_{p^2},0\right)$$

ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} \\ & & & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \in S$$

นั่นคือ $A\in T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},0\right)$ ก็ต่อเมื่อ $a_{(n-1)(n)},a_{(n)(n-1)}\in\mathbb{Z}_{p^2}$ และ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} \\ & & & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \in S$$

เนื่องจากจำนวนที่เป็นไปได้ของ a_{nn} คือ $p(p-1)$ แบบ จำนวนที่เป็นไปได้ของแต่ละ $a_{(n-1)(n)}$ และ $a_{(n)(n-1)}$ คือ p^2 แบบ และ

จำนวนที่เป็นไปได้ของ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} \\ & & & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}$ คือ $|S| = \left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}, 0\right)\right|$ แบบ

ทำให้ได้ว่าจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียง A ซึ่ง $a_{nn} \neq 0$ และ $\det(A) = 0$ คือ

$$p^5(p-1)\left|T_{n-1}\left(\mathbb{Z}_{p^2}, 0\right)\right|$$

กรณีที่ 2 $a_{nn}, a_{(n-1)n} \notin U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ โดยทฤษฎีบทที่ 2.2 ได้ว่า $p|a_{nn}$ และ $p|a_{n-1,n}$ ให้

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & a_{(n-2)(n-1)} & \\ & \ddots & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} & \frac{a_{(n-1)n}}{p} \\ & & & a_{n(n-1)} & \frac{a_{nn}}{p} \end{bmatrix}$$

และให้ $C = \left[b_{ij} \pmod p\right]$ จะได้ว่า $\det(C) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\det(B) \equiv 0 \pmod p$

สำหรับแต่ละเมทริกซ์ $C \in T_n\left(\mathbb{Z}_p\right)$ จะมีเมทริกซ์

$$B = \begin{bmatrix} c_{11} + k_{11}p & c_{12} + k_{12}p & & & \\ c_{21} + k_{21}p & c_{22} + k_{22}p & \ddots & c_{(n-2)(n-1)} + k_{(n-2)(n-1)}p & \\ & \ddots & c_{(n-1)(n-2)} + k_{(n-1)(n-2)}p & c_{(n-1)(n-1)} + k_{(n-1)(n-1)}p & \frac{c_{(n-1)n}}{p} \\ & & & c_{n(n-1)} + k_{n(n-1)}p & \frac{c_{nn}}{p} \end{bmatrix}$$

$\in T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$

เมื่อ $k_{ij} \in \mathbb{Z}_p$ จำนวน p^{3n-4} เมทริกซ์ซึ่งสมนัยกับเมทริกซ์ C และจำนวนของเมทริกซ์ C ซึ่ง $\det(C) = 0$ คือ $\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p, 0\right)\right|$

ดังนั้นจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียง A ซึ่ง $a_{nn}, a_{(n-1)n} \notin U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ และ $\det(A)=0$ คือ

$$p^{3n-4}\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p, 0\right)\right|$$

กรณีที่ 3 $a_{nn} \notin U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ และ $a_{(n-1)n} \in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ โดยการกระจายโคแฟคเตอร์จะได้ว่า

$$\det(A) = a_{nn}\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} \\ & & & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}\right)$$

$$-\,a_{(n-1)n}a_{n(n-1)}\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-3)(n-3)} & a_{(n-3)(n-2)} \\ & & & a_{(n-2)(n-3)} & a_{(n-2)(n-2)} \end{bmatrix}\right)$$

จะเห็นได้ว่าถ้า $a_{nn}\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} \\ & & & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}\right)=0$ และ $a_{n(n-1)}=0$

แล้ว $\det(A)=0$

สำหรับ $a_{nn} \notin U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right), a_{n(n-1)}=0, a_{(n-1)n} \in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ และ

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} \\ & & & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}\right) \notin U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$$

ทำให้ $\det(A)=0$

เนื่องจากจำนวนเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} \\ & & & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \notin IT_{n-1}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$

คือ $\left|T_{n-1}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right| - \left|IT_{n-1}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right| = p^{2(3n-2)} - p^{3n-2}\left|IT_{n-1}\left(\mathbb{Z}_{p}\right)\right|$ จำนวนตัวเลือกของ a_{nn} คือ p จำนวนตัวเลือกของ $a_{(n-1)n}$ คือ $p(p-1)$

จึงได้ว่าในกรณีนี้จำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียง A ซึ่ง $\det(A)=0$ จะมากกว่าหรือเท่ากับ

$$p^2(p-1)\cdot\left(p^{2(3n-2)} - p^{3n-2}\left|IT_{n-1}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|\right)$$

จากทั้ง 3 กรณี จะได้ว่า

$$\left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},0\right)\right| \geq \left|p^5(p-1)\cdot\left|T_{n-1}\left(\mathbb{Z}_{p^2,0}\right)\right| + p^{3n-4}\cdot\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p,0\right)\right|\right|$$
$$+ p^2(p-1)\cdot\left(p^{2(3n-2)} - p^{3n-2}\left|IT_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|\right)$$

ตามต้องการ ■

จากทฤษฎีบทที่ 3.5 และ ทฤษฎีบทที่ 3.4 จะได้ว่า

$$\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p,0\right)\right| = p^{3n-2} - \left(x_1\right)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left(\left(p^2-1\right)p-x_2\right)}{x_1-x_2}\right)$$
$$+\left(x_2\right)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left(\left(p^2-1\right)p-x_1\right)}{x_2-x_1}\right)$$

และ $\left|IT_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| = \left(x_1\right)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left(\left(p^2-1\right)p-x_2\right)}{x_1-x_2}\right) + \left(x_2\right)^{n-1}\left(\frac{(p-1)\left(\left(p^2-1\right)p-x_1\right)}{x_2-x_1}\right)$

ซึ่งสามารถใช้ในการคำนวณตามสูตรในทฤษฎีบทที่ 4.4

ต่อไปจะพิจารณา $\left|IT_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},b\right)\right|$ เมื่อ $b \in ZD\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$

ทฤษฎีบทที่ 4.5 ให้ n เป็นจำนวนนับ ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า $\left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},b\right)\right| = \left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},p\right)\right|$ สำหรับทุก $b \in ZD\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบทที่ 2.2 $ZD\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right) = \left\{cp \,\middle|\, c \in \mathbb{Z}_p - \{0\}\right\}$ สำหรับแต่ละ $b \in ZD\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ จะได้ว่า $b = cp$ สำหรับบาง $c \in \mathbb{Z}_p - \{0\}$

ให้ $g : T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},p\right) \to T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},cp\right)$ นิยามโดย

$$g(A) = \operatorname{diag}(c,1,...,1)A$$

ให้ $A \in T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},p\right)$ จะได้ว่า

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ & & & a_{(n+1)n} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\det(A) = p$$

และ

$$g(A) = \begin{bmatrix} c & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ & & & a_{(n+1)n} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ & & & a_{(n+1)n} & a_{nn} \end{bmatrix} \in T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$$

จาก $\det(A)=p$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\det(g(A)) &= \det(\operatorname{diag}(c,1,\ldots,1))\cdot\det(A) \\
&= c\det(A) \\
&= cp
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $g(A)\in T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},cp\right)$

ให้

$$A,B\in T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},p\right)$$

สมมติให้ $g(A)=g(B)$ จะได้ว่า

$$\operatorname{diag}(c,1,\ldots,1)A=\operatorname{diag}(c,1,\ldots,1)B$$

จาก $\det(\operatorname{diag}(c,1,\ldots,1))=c\in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ จะได้ว่า $c^{-1}\in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ และ

$$A=\operatorname{diag}\left(c^{-1},1,\ldots,1\right)\operatorname{diag}(c,1,\ldots,1)A=\operatorname{diag}\left(c^{-1},1,\ldots,1\right)\operatorname{diag}(c,1,\ldots,1)B=B$$

ทำให้ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & & & \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & & \\ & b_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{(n-1)n} \\ & & & b_{(n+1)n} & b_{nn} \end{bmatrix}\in T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},cp\right)$$

เลือก

$$A=\begin{bmatrix} c^{-1}\cdot b_{11} & c^{-1}\cdot b_{12} & & & \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & & \\ & b_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{(n-1)n} \\ & & & b_{(n+1)n} & b_{nn} \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $A\in T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ และ

$$\det(A) = c^{-1}\det(B)$$
$$= c^{-1}\cdot cp$$
$$= p$$

ดังนั้น $A \in T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}, p\right)$ และ

$$g(A) = \operatorname{diag}(c,1,\ldots,1)A$$

$$= \begin{bmatrix} c & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c^{-1}\cdot b_{11} & c^{-1}\cdot b_{12} & & & \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & & \\ & b_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{(n-1)n} \\ & & & b_{(n+1)n} & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= B$$

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง เพราะฉะนั้น g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงซึ่งทำให้

$$\left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}, b\right)\right| = \left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}, p\right)\right|$$

ตามต้องการ ■

ทฤษฎีบทที่ 4.6 ให้ n เป็นจำนวนนับและ ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า

$$\left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}, b\right)\right| = \frac{\left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right| - \left|IT_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right| - \left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}, 0\right)\right|}{\left|ZD\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right|}$$

$$\leq \frac{p^{2(3n-2)} - \left|IT_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right| - \pi_1}{p-1}$$

สำหรับทุก $b \in ZD\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ เมื่อ $\pi_1 = p^5(p-1)\cdot\left|T_{n-1}\left(\mathbb{Z}_{p^2,0}\right)\right| + p^{3n-4}\cdot\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p, 0\right)\right|$

$$+ p^2(p-1)\cdot\left(p^{2(3n-2)} - p^{3n-2}\left|IT_{n-1}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|\right)$$

บทพิสูจน์ ให้ $b \in ZD\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ เนื่องจากริง $\mathbb{Z}_{p^2} = \{0\} \cup ZD\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right) \cup U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$

โดยทฤษฎีบทที่ 4.5 จะได้

$$\left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right| - \left|IT_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right| - \left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},0\right)\right| = \left|\bigcup_{a\in ZD\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)} T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)\right|$$

$$= \left|ZD\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right|\left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},b\right)\right|$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},b\right)\right| = \frac{\left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right| - \left|IT_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right| - \left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},0\right)\right|}{\left|ZD\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right|}$$

โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.2

$$\left|T_n\left(\mathbb{Z}_{p^2},b\right)\right| \le \frac{p^{2(3n-2)} - \left|IT_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right| - \pi_1}{p-1}$$

เมื่อ $\pi_1 = p^5\left(p-1\right)\cdot\left|T_{n-1}\left(\mathbb{Z}_{p^2,0}\right)\right| + p^{3n-4}\cdot\left|T_n\left(\mathbb{Z}_p,0\right)\right|$

$$+p^2\left(p-1\right)\cdot\left(p^{2(3n-2)} - p^{3n-2}\left|IT_n\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|\right)$$

การพิสูจน์เสร็จสมบูรณ์ ■

การคำนวณ $\left|IT_n\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right|$ ในทฤษฎีทบที่ 4.6 สามารถทำได้โดยตรงจากทฤษฎีบทที่ 4.1

4.2 การแจงนับเมทริกซ์สามแนวเฉียงรูปแบบพิเศษซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บนริงของจำนวนเต็มมอดุโลจำนวนเฉพาะยกกำลังสอง

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงการแจงนับเมทริกซ์สามแนวเฉียงรูปแบบพิเศษใน $T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ ซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บนริง $\mathbb{Z}_{p^2}$ โดยจะแสดงสูตรชัดแจ้งของ $\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)\right|$ สำหรับทุกจำนวนนับคี่ n ทุกจำนวนเฉพาะ p และทุกสมาชิก $a,r,s\in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$

ผลลัพธ์ต่อไปนี้วิเคราะห์ได้โดยตรงจากบทนิยามของ $T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$

ทฤษฎีบทประกอบที่ 4.7 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะให้ n เป็นจำนวนนับและให้ $r,s\in\mathbb{Z}_p^2$ จะได้ว่า

$$\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right| = p^{2n}$$

ในเบื้องต้นเราจะนับจำนวนเมทริกซ์ไม่เอกฐานใน $T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$

ทฤษฎีบทที่ 4.8 ให้ n เป็นจำนวนนับและให้ p เป็นจำนวนเฉพาะให้ $r,s \in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ จะได้ว่า

$$\left|IT_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right| = p^n \left|IT_{n,\bar{r},\bar{s}}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right| = p^{2n}\left(\frac{p}{1+p}\right) + (-p)^n \frac{1}{p+1}$$

เมื่อ $\bar{r},\bar{s} \in \mathbb{Z}_p$ ซึ่ง $\bar{r} \equiv r \pmod{p}$ และ $\bar{s} \equiv s \pmod{p}$

บทพิสูจน์ ให้ $\bar{r},\bar{s} \in \mathbb{Z}_p$ ซึ่ง $\bar{r} \equiv r \pmod{p}$ และ $\bar{s} \equiv s \pmod{p}$ ให้

$$\varphi : T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right) \to T_{n,\bar{r},\bar{s}}\left(\mathbb{Z}_p\right) \text{ นิยามโดย}$$

$$\varphi(A) = A \pmod{p}$$

จะได้ว่า φ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง
ให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & s & & & \\ r & a_{22} & s & & \\ & r & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & s \\ & & & r & a_{nn} \end{bmatrix} \in T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$$

จะได้ว่า แต่ละแนวทแยงของ $\varphi(A)$ จะมี a_{ii} จำนวน p แบบที่สมนัยกันจึงได้ว่า φ เป็นฟังก์ชัน p^n ต่อ 1 ทำให้ได้ว่า

$$\frac{\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right|}{\left|T_{n,\bar{r},\bar{s}}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|} = p^n$$

โดยสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์จะได้ว่า $\det\left(\varphi(A)\right) \equiv \det(A) \pmod{p}$ ทำให้ได้ว่า $A \in IT_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ ก็ต่อเมื่อ $\varphi(A) \in IT_{n,\bar{r},\bar{s}}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ ทำให้ได้ว่า

$$\frac{\left|IT_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right|}{\left|IT_{n,\bar{r},\bar{s}}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|} = p^n$$

นั่นคือ
$$\left|IT_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right| = p^n \left|IT_{n,\bar{r},\bar{s}}\left(\mathbb{Z}_p\right)\right|$$

จากทฤษฎีบทที่ 3.11 จะได้ว่า

$$\left|IT_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right| = p^n\left(p^n\left(\frac{p}{1+p}\right)+(-1)^n\frac{1}{p+1}\right)$$

$$= p^{2n}\left(\frac{p}{1+p}\right)+(-p)^n\frac{1}{p+1}$$

ตามต้องการ ■

สำหรับจำนวนนับคี่ n และ $a \in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง $\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)\right|$ และ $\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},1\right)\right|$ ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญในการหาค่า $\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)\right|$ ดังนี้

ทฤษฎีบทประกอบที่ 4.9 ให้ n เป็นจำนวนนับและ $r,s \in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ ถ้า n เป็นจำนวนคี่แล้วจะได้ว่า

$$\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)\right| = \left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},1\right)\right|$$

สำหรับทุก $a \in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$

บทพิสูจน์ ให้ $a \in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ และให้ $\phi : T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},1\right) \to T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)$ นิยามโดย

$$\phi\left(\begin{bmatrix} a_1 & s & & & & \\ r & a_2 & s & & & \\ & r & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & a_{n-1} & s \\ & & & & r & a_n \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} a & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & a & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & s & & & & \\ r & a_2 & s & & & \\ & r & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & a_{n-1} & s \\ & & & & r & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & a^{-1} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a^{-1} & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a\cdot a_1 & a\cdot s & & & & \\ r & a_2 & s & & & \\ & a\cdot r & a\cdot a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & a\cdot s & \\ & & & r & a_{n-1} & s \\ & & & & ar & aa_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & a^{-1} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a^{-1} & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a\cdot a_1 & s & & & & \\ r & a^{-1}\cdot a_2 & s & & & \\ & r & a\cdot a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & a\cdot a_{n-1} & s \\ & & & & r & a^{-1}\cdot a_n \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก

$$\phi\left(\begin{bmatrix} a_1 & s & & & & \\ r & a_2 & s & & & \\ & r & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & a_{(n-1)} & s \\ & & & & r & a_n \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a\cdot a_1 & s & & & & \\ r & a^{-1}\cdot a_2 & s & & & \\ & r & a\cdot a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & a\cdot a_{n-1} & s \\ & & & & r & a^{-1}\cdot a_n \end{bmatrix}$$

$$\in T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$$

และ

$$\det\left(\phi\left(\begin{bmatrix} a_1 & s & & & & \\ r & a_2 & s & & & \\ & r & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & a_{(n-1)} & s \\ & & & & r & a_n \end{bmatrix}\right)\right)=a^{\frac{n+1}{2}}\cdot 1\cdot\left(a^{-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}=a$$

จึงได้ว่า

$$\phi\left(\begin{bmatrix} a_1 & s & & & & \\ r & a_2 & s & & & \\ & r & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & a_{(n-1)} & s \\ & & & & r & a_n \end{bmatrix}\right)\in T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)$$

นั่นคือ ϕ เป็นฟังก์ชันจาก $T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},1\right)$ ไป $T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)$

ให้

$$X=\begin{bmatrix} x_1 & s & & & & \\ r & x_2 & s & & & \\ & r & x_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & x_{(n-1)} & s \\ & & & & r & x_n \end{bmatrix}\in T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)$$

ได้ว่า $\det(X)=a$ เลือก

$$Y=\begin{bmatrix} a^{-1} & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & a^{-1} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & a^{-1} \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & a & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$Y=\begin{bmatrix} a^{-1}\cdot x_1 & a^{-1}\cdot s & & & & \\ r & x_2 & s & & & \\ & a^{-1}\cdot r & a^{-1}\cdot x_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & a^{-1}\cdot s & \\ & & & r & x_{(n-1)} & s \\ & & & & a^{-1}\cdot r & a^{-1}\cdot a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & a & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^{-1}\cdot x_1 & s & & & & \\ r & a\cdot x_2 & s & & & \\ & r & a^{-1}x_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & a\cdot x_{(n-1)} & s \\ & & & & r & a^{-1}\cdot x_n \end{bmatrix}\in T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$$

และ $\det(Y)=\left(a^{-1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot a\cdot\left(a\ \right)^{\frac{n-1}{2}}=1$ ดังนั้น $Y\in T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},1\right)$ และ

$$\phi(Y)=\begin{bmatrix} a &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && a &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& 1 & \\ &&&&& a \end{bmatrix} Y \begin{bmatrix} 1 &&&&& \\ & a^{-1} &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& a^{-1} & \\ &&&&& 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && a &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& 1 & \\ &&&&& a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^{-1} &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && a^{-1} &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& 1 & \\ &&&&& a^{-1} \end{bmatrix}$$

$$X\begin{bmatrix} 1 &&&&& \\ & a &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& a & \\ &&&&& 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 &&&&& \\ & a^{-1} &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& a^{-1} & \\ &&&&& 1 \end{bmatrix}$$

$$= X$$

ดังนั้น ϕ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ $X, Y \in T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2}, 1\right)$ สมมติให้ $\phi(X)=\phi(Y)$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} a &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && a &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& 1 & \\ &&&&& a \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} a &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && a &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& 1 & \\ &&&&& a \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 &&&&& \\ & a^{-1} &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& a^{-1} & \\ &&&&& 1 \end{bmatrix} Y \begin{bmatrix} 1 &&&&& \\ & a^{-1} &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& a^{-1} & \\ &&&&& 1 \end{bmatrix}$$

ทำให้ได้ว่า

$$X=\begin{bmatrix} a^{-1} & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & a^{-1} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & a^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & a & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & a \end{bmatrix}$$

$$X\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & a^{-1} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a^{-1} & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & a & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^{-1} & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & a^{-1} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & a^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & a & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & a \end{bmatrix}$$

$$Y\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & a^{-1} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a^{-1} & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & a & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$=Y$$

ดังนั้น ϕ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

เพราะฉะนั้น ϕ ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง ซึ่งทำให้

$$\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)\right|=\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},1\right)\right|$$

ตามต้องการ ■

ต่อไปเป็นการนับจำนวนเมทริกซ์ใน $T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)$ สำหรับ $r,s\in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ และจำนวนนับคี่ n

ทฤษฎีบทที่ 4.10 ให้ n เป็นจำนวนนับให้ $r,s \in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ และให้ $a \in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$ ถ้า n เป็นจำนวนคี่ แล้ว $\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)\right| = \dfrac{p^{2n}-p^{n-1}}{p^2-1}$

บทพิสูจน์ ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบทที่ 4.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left|IT_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right| &= \left|\bigcup_{a\in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)} T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)\right| \\ &= \sum_{a\in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)} \left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)\right| \\ &= \sum_{a\in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)} \left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},1\right)\right|\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\left|IT_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right| = \left|U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right|\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},1\right)\right|$$

โดยทฤษฎีบทประกอบบที่ 2.1 ทฤษฎีบทที่ 4.8 และทฤษฎีบทประกอบที่ 4.9 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)\right| &= \left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},1\right)\right| \\ &= \frac{\left|IT_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right|}{\left|U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)\right|} \\ &= \frac{p^{2n}\left(\dfrac{p}{1+p}\right)+\left(-p\right)^{n}\left(\dfrac{1}{p+1}\right)}{p\left(p-1\right)} \\ &= \frac{p^{2n}-\left(-p\right)^{n-1}}{p^2-1}\end{aligned}$$

เนื่องจาก n เป็นจำนวนคี่จะได้ว่า

$$\left|T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2},a\right)\right| = \frac{p^{2n}-p^{n-1}}{p^2-1}$$

ตามต้องการ ■

บทที่ 5
สรุป

งานวิจัยนี้ศึกษาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์สามแนวเฉียงโดยเน้นการแจงนับเมทริกซ์สามแนวเฉียงเอกฐานและเมทริกซ์สามแนวเฉียงไม่เอกฐานบนริง $\mathbb{Z}_p$ และ $\mathbb{Z}_{p^2}$ พร้อมทั้งแสดงการนับจำนวนหรือขอบเขตของจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงบน $\mathbb{Z}_p$ และ $\mathbb{Z}_{p^2}$ ซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์ นอกจากนี้ได้นับจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงเอกฐานและเมทริกซ์สามเฉียงไม่เอกฐานเอกฐานบนริง $\mathbb{Z}_p$ และ $\mathbb{Z}_{p^2}$ สำหรับกรณีที่ n เป็นจำนวนนับคี่ ได้เสนอผลการนับจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงขนาด $n\times n$ รูปแบบพิเศษบางแบบบนริง $\mathbb{Z}_p$ และ $\mathbb{Z}_{p^2}$ ซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์ไว้ด้วย

ผลการนับจำนวนของเมทริกซ์สามแนวเฉียงขนาด $n\times n$ เมื่อกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บนริง R เมื่อ R คือ ฟีลด์ $\mathbb{Z}_p$ หรือริง $\mathbb{Z}_{p^2}$ ในงานวิจัยนี้ สรุปได้ดังนี้

1. สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ถ้า a และ b เป็นสมาชิกชนิดเดียวกันใน R จะได้ว่า $\left|T_n(R,a)\right| = \left|T_n(R,b)\right|$
2. สำหรับ n เป็นจำนวนนับและ $a\in R$ สูตรของ $\left|IT_n(R)\right|$ อยู่ในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์อันดับสองซึ่งคำนวณค่าได้ตามทฤษฎีบทที่ 3.4
3. สำหรับแต่ละจำนวนนับ n และ $a\in U(R)$ สูตรชัดแจ้งของ $\left|T_n(R,a)\right|$ ขึ้นกับพจน์ n และ p โดยอิสระจาก a เนื่องจากการพิสูจน์ของทฤษฎีบทที่ 3.6 จะได้
$$\left|T_n(\mathbb{Z}_p,a)\right| = \frac{\left|IT_n(\mathbb{Z}_p)\right|}{p-1}$$
ทำให้ได้สูตรชัดแจ้งดังแสดงในทฤษฎีบทที่ 3.7 คือ
$$\left|T_n(\mathbb{Z}_p,a)\right| = (x_1)^{n-1}\left(\frac{(p^2-1)p-x_2}{x_1-x_2}\right)+(x_2)^{n-1}\left(\frac{(p^2-1)p-x_1}{x_2-x_1}\right)$$
เมื่อ $x_1 = \frac{(p-1)}{2}\left(p^2+\sqrt{p^4+4p^3}\right)$ และ $x_2 = \frac{(p-1)}{2}\left(p^2-\sqrt{p^4+4p^3}\right)$
4. สำหรับแต่ละจำนวนนับ n และแต่ละจำนวนเฉพาะ p สูตรชัดแจ้งของ $\left|T_n(\mathbb{Z}_p,0)\right|$ หาได้จาก $\left|T_n(\mathbb{Z}_p,0)\right| = \left|T_n(\mathbb{Z}_p)\right| - \left|IT_n(\mathbb{Z}_p)\right|$

5. สำหรับจำนวนนับคี่ n จำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงขนาด $n \times n$ รูปแบบพิเศษใน

$$T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_p\right) = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & s & & & & \\ r & a_2 & s & & & \\ & r & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & a_{(n-1)} & s \\ & & & & r & a_n \end{bmatrix} \middle| \, a_i \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

ซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บนริง $\mathbb{Z}_p$ ขึ้นกับพจน์ n และ p ซึ่งอิสระจาก r,s ดังแสดงในทฤษฎีบทที่ 3.13

6. เมื่อทำการแจงนับของเมทริกซ์สามแนวเฉียงซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บนริง $\mathbb{Z}_{p^2}$ ในทำนองเดียวกันกับข้อ 1 - 4 จะได้สูตรชัดแจ้งของเมทริกซ์สามแนวเฉียงไม่เอกฐานขนาด $n \times n$ ซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บนริง $\mathbb{Z}_{p^2}$ ดังแสดงในทฤษฎีบทที่ 4.3 นอกจากนี้ได้นำเสนอค่าขอบเขตของจำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงเอกฐานขนาด $n \times n$ ซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บน $\mathbb{Z}_{p^2}$ ไว้ด้วย

7. ในทำนองเดียวกันกับข้อที่ 5 จำนวนเมทริกซ์สามแนวเฉียงไม่เอกฐานขนาด $n \times n$ รูปแบบพิเศษ

$$\begin{bmatrix} a_1 & s & & & & \\ r & a_2 & s & & & \\ & r & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & s & \\ & & & r & a_{(n-1)} & s \\ & & & & r & a_n \end{bmatrix} \in T_{n,r,s}\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$$

ซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์ได้แสดงไว้ในหัวข้อที่ 4.2 เมื่อ n เป็นจำนวนคี่และ $r,s \in U\left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)$

รายการอ้างอิง

1. Klain, D.A., *An intuitive derivation of heron's formula.* The American Mathematical Monthly, 2004. **111**(8): p. 709-712.
2. Cheney, W. and D. Kincaid, *Linear algebra: Theory and applications.* The Australian Mathematical Society, 2009. **110**: p. 544-550.
3. Korostyshevskaya, O. and S.E. Minkoff, *A matrix analysis of operator-based upscaling for the wave equation.* SIAM Journal on Numerical Analysis, 2006. **44**(2): p. 586-612.
4. Mukhopadhyay, A., *On the probability that the determinant of an nxn matrix over a finite field vanishes.* Discrete mathematics, 1984. **51**(3): p. 311-315.
5. Brent, R.P. and B.D. McKay, *Determinants and ranks of random matrices over Zm.* Discrete Mathematics, 1987. **66**(1-2): p. 35-49.
6. Lockhart, J.M. and W.P. Wardlaw, *Determinants of Matrices over the Integers Modulo m.* Mathematics Magazine, 2007. **80**(3): p. 207-214.
7. Dummit, D.S. and R.M. Foote, *Abstract algebra.* Vol. 1999. 1991: Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ.
8. Jitman, S., K. Dukdokjan, and C. Wongwilai, *On the Solutions of Some Equations Over Rings of Integers Modulo the Square of a Prime.* The PUMP Journal of Undergraduate Research, 2021. **4**: p. 117-126.
9. Choosuwan, P., S. Jitman, and P. Udomkavanich, *Determinants of matrices over commutative finite principal ideal rings.* Finite Fields and Their Applications, 2017. **48**: p. 126-140.
10. Jitman, S., *Determinants of some special matrices over commutative finite chain rings.* Special Matrices, 2020. **8**(1): p. 242-256.
11. Da Fonseca, C., *On the eigenvalues of some tridiagonal matrices.* Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007. **200**(1): p. 283-286.
12. Fischer, C.F. and R.A. Usmani, *Properties of some tridiagonal matrices and their application to boundary value problems.* SIAM Journal on Numerical Analysis, 1969. **6**(1): p. 127-142.

13. Meurant, G., *A review on the inverse of symmetric tridiagonal and block tridiagonal matrices.* SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 1992. **13**(3): p. 707-728.

14. พัฒนางกูร, ร.ด.ป., พีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น (*Elementary of Abstract algebra).* 2559. **1**(โฮโมมอร์ฟิซึม และไอโซมอร์ฟิซึม): p. 146.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	นางสาว โยษิตา ศรีเจริญ
วัน เดือน ปี เกิด	7 กุมภาพันธ์ 2539
สถานที่เกิด	ชัยนาท
วุฒิการศึกษา	2561 : วท.บ (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ 2566 : วท.ม (คณิตศาสตร์ศึกษา) มหาวิทยาลัยศิลปากร
ที่อยู่ปัจจุบัน	9/54 หมู่ 1 ต.บางเตย อ. สามพราน จ.นครปฐม (หมู่บ้านร่มไม้ปภาวรินทร์) 73210
ผลงานตีพิมพ์	สมพงศ์ จิตต์มั่น, โยษิตา ศรีเจริญ, การแจงนับเมทริกซ์สามแนวเฉียงซึ่งกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์บนริง Zp, Proceeding of the Annual Pure and Applied Mathematics Conference 2022 (APAM 2022), Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, Chulalongkorn University, Bangkok, 119-135 (2022).