



การแจกแจงแบบผสมสำหรับการคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยและการประมาณค่า
ความน่าจะเป็นที่บริษัทประกันภัยจะล้มละลาย

โดย

นายจิรเมธ เสงี่ยมสุข

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาสถิติประยุกต์ แผน ก แบบ ก 2

ภาควิชาสถิติ

มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2568

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยศิลปากร

การแจกแจงแบบผสมสำหรับการคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยและการ
ประมาณค่าความน่าจะเป็นที่บริษัทประกันภัยจะล้มละลาย



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาสถิติประยุกต์ แผน ก แบบ ก 2

ภาควิชาสถิติ

มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2568

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยศิลปากร

MIXED DISTRIBUTION FOR INSURANCE PREMIUM PRICING UNDER THE BONUS-
MALUS SYSTEM AND ESTIMATION OF RUIN PROBABILITY FOR INSURANCE
COMPANIES



A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for Master of Science APPLIED STATISTICS
Department of STATISTICS
Academic Year 2025
Copyright of Silpakorn University

หัวข้อ	การแจกแจงแบบผสมสำหรับการคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบ ลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยและการประมาณค่าความน่าจะเป็นที่บริษัท ประกันภัยจะล้มละลาย
โดย	นายจิรเมธ เอ็งเจริญสุข
สาขาวิชา	สถิติประยุกต์ แผน ก แบบ ก 2
อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อติศักดิ์ เม้ามีศรี

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

.....	คณบดีคณะวิทยาศาสตร์
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. กรกช ชันจิรกุล)	
พิจารณาเห็นชอบโดย	
.....	ประธานกรรมการ
(อาจารย์ ดร. กรรณิกาน์ หิรัญกลี)	
.....	อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อติศักดิ์ เม้ามีศรี)	
.....	ผู้ทรงคุณวุฒิภายใน
(อาจารย์ ดร. กรรณิกาน์ หิรัญกลี)	
.....	ผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก
(รองศาสตราจารย์ ดร. วีณากร เอียวสานุรักษ์)	

670720019 : สถิติประยุกต์ แผน ก แบบ ก 2

คำสำคัญ : ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น, การคำนวณเบี่ยงแปรกันภายใต้ระบบลดเบี่ยง-เพิ่มเบี่ยง, ตัวแบบความเสี่ยงภัย, เงินทุนเริ่มต้น, วิธีของเบย์เซียน

นาย จิรเมธ เอ็งเจริญสุข: การแจกแจงแบบผสมสำหรับการคำนวณเบี่ยงแปรกันภายใต้ระบบลดเบี่ยง-เพิ่มเบี่ยงและการประมาณค่าความน่าจะเป็นที่บริษัทประกันภัยจะล้มละลาย อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อติศักดิ์ เหมามศรี

การศึกษานี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสำหรับความสูญเสียทางประกันภัยโดยพิจารณาจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน งานวิจัยประยุกต์ใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์และสถิติ 3 แนวทางหลัก ได้แก่ เทคนิค Azzalini เทคนิคตระกูล Transmuted Distribution และเทคนิคการผสมการแจกแจง (Mixing Distribution) เพื่อให้ได้ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นที่สะท้อนลักษณะข้อมูลจริงทางประกันภัยรถยนต์ได้อย่างเหมาะสม นอกจากนี้งานวิจัยได้เสนอตัวแบบการคำนวณเบี่ยงแปรกันภายใต้ระบบลดเบี่ยง-เพิ่มเบี่ยงในการประกันภัยรถยนต์โดยพิจารณาจากจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนร่วมกัน ภายใต้กรอบแนวคิดของเบย์เซียน พร้อมทั้งจำลองสถานการณ์ภายใต้กระบวนการส่วนเกินเพื่อประเมินความน่าจะเป็นที่บริษัทประกันภัยจะล้มละลาย รวมทั้งศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเงินทุนเริ่มต้นกับความน่าจะเป็นที่บริษัทประกันภัยจะล้มละลาย เพื่อใช้เป็นแนวทางในการกำหนดเงินทุนเริ่มต้นขั้นต่ำให้สอดคล้องกับนโยบายของบริษัท และช่วยส่งเสริมความสามารถในการดำเนินกิจการของบริษัทประกันภัยให้เป็นไปอย่างต่อเนื่องและมั่นคง

ในส่วนของจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนได้นำเสนอฟังก์ชันการแจกแจงโดยการผสมฟังก์ชันการแจกแจงปัวซองกับฟังก์ชันการแจกแจงเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก และฟังก์ชันการแจกแจงเลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ และได้เสนอตัวแบบการคำนวณเบี่ยงแปรกันภายใต้ระบบลดเบี่ยง-เพิ่มเบี่ยงแปรกันภัยจากฟังก์ชันที่ได้นำเสนอ ภายใต้กรอบแนวคิดของเบย์เซียน สำหรับฟังก์ชันการแจกแจงของมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ได้นำเสนอฟังก์ชันการแจกแจงผสมระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา กับฟังก์ชันการแจกแจงเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก และฟังก์ชันการแจกแจงเลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ พร้อมทั้งเสนอตัวแบบการคำนวณเบี่ยงแปรกันภายใต้ระบบลดเบี่ยง-เพิ่มเบี่ยงแปรกันภัยจากฟังก์ชันที่ได้นำเสนอ ภายใต้กรอบแนวคิดของเบย์เซียนเช่นเดียวกัน

วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับตัวแบบจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่า

สินไหมทดแทนจะใช้การประมาณค่าด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีการทดสอบความเหมาะสมของตัวแบบ ใช้การทดสอบภาวะสารูปดี 3 วิธี ได้แก่ การทดสอบภาวะสารูปดีโดยสถิติไคกำลังสอง การทดสอบภาวะสารูปดีโดยสถิติโครโมโกรอฟ-สมิธนอฟ และการทดสอบภาวะสารูปดีโดยสถิติแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิ่ง นอกจากนี้ ได้มีการพิจารณาเกณฑ์สารสนเทศของอะกะอิเกะ และเกณฑ์สารสนเทศของเบส์ร่วมด้วย

วิธีของเบย์เซียนถูกนำมาใช้เพื่อให้ได้ฟังก์ชันภายหลังสำหรับฟังก์ชันการแจกแจงของจำนวนครั้งและฟังก์ชันการแจกแจงของมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันเหล่านี้ใช้เพื่อประมาณค่าเบี้ยประกันภัยที่จะเรียกเก็บจากผู้ถือกรมธรรม์ ค่าเบี้ยประกันภัยที่เหมาะสมได้มาโดยใช้ค่าคาดหวังของจำนวนครั้งจากตัวแบบตามส่วนประกอบจำนวนครั้งคูณด้วยค่าคาดหวังของมูลค่าจากตัวแบบตามส่วนประกอบของมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

ผลการพิจารณาฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสำหรับจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน พบว่าฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก และฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-แบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับเหมาะสมในการอธิบายลักษณะของข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของประกันภัยรถยนต์ ในขณะที่ฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก และฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-แบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับเหมาะสมในการอธิบายลักษณะของข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

ผลการกำหนดเบี้ยประกันภัยในส่วนประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัย ซึ่งคำนวณโดยใช้ฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก และฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-แบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับพบว่าเบี้ยประกันมีแนวโน้มลดลงเมื่อผู้เอาประกันภัยไม่มีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน และเบี้ยประกันจะเพิ่มขึ้นเมื่อผู้เอาประกันภัยมีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน นอกจากนี้ การกำหนดเบี้ยประกันภัยโดยพิจารณาทั้งองค์ประกอบจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมรวมกัน สรุปได้ว่าเป็นการยุติธรรมมากกว่าที่จะเรียกเก็บเบี้ยประกันกับผู้ถือกรมธรรม์ที่ไม่พิจารณาถึงจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเพียงอย่างเดียว แต่ยังรวมถึงมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนภายใต้จำนวนปีที่ผู้ถือกรมธรรม์อยู่ในพอร์ตโฟลิโอ อีกทั้งเมื่อการแจกแจงของจำนวนครั้งและมูลค่าที่แตกต่างกันส่งผลต่อความเข้มงวดของบริษัทในการเรียกเก็บเบี้ยประกันภัยต่อผู้เอาประกันภัยแตกต่างกัน

เมื่อพิจารณาฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมาะสมในการอธิบายลักษณะข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน พบว่าฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก มีความเหมาะสม ดังนั้นจึงได้จำลองข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนตามการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก โดยใช้การแจกแจงดังกล่าวในการประมาณความน่าจะเป็นในการล้มละลายของกระบวนการส่วนเกินเวลาไม่ต่อเนื่องภายใต้ระยะเวลา 1 ปี 3 ปี และ 5 ปี ผลการวิจัยพบว่าเงินทุนเริ่มต้นและค่าเผื่อความปลอดภัยที่เพิ่มขึ้นช่วยลดความน่าจะเป็นในการล้มละลาย อีกทั้งเมื่อกระบวนการส่วนเกินถูกดำเนินไปในระยะเวลาที่ยาวนานขึ้นส่งผลให้ความน่าจะเป็นในการล้มละลายเพิ่มขึ้นในทุกระดับของค่าเผื่อความปลอดภัย นอกจากนี้ เงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุดจะลดลงเมื่อค่าเผื่อความปลอดภัยเพิ่มขึ้น และจะยิ่งลดลงเมื่อยอมรับระดับความเสี่ยงได้สูงขึ้น ผลการวิจัยนี้สามารถใช้เป็นแนวทางในการกำหนดเบี้ยประกันภัยและเงินทุนเริ่มต้นที่เหมาะสม เพื่อสนับสนุนความความมั่นคงและความยั่งยืนของธุรกิจประกันภัย



670720019 : Major APPLIED STATISTICS

Keyword : Probability distribution function, Premium calculation under the Bonus-malus system, Risk model, Capital reserve, Bayesian method

Mr. Jiramet HENGCHAROENSUK : Mixed Distribution for Insurance Premium Pricing under the Bonus-Malus System and Estimation of Ruin Probability for Insurance Companies Thesis advisor : Assistant Professor Doctor Adisak Moumeesri

This study aims to construct a probability distribution function for insurance losses based on both the number of claims and severity of claims. The research applies three main mathematical and statistical approaches: Azzalini technique, the transmuted distribution technique, and the mixed distribution technique, to obtain a probability distribution that effectively reflects the characteristics of real motor insurance data. Furthermore, this research proposes a premium calculation model under a Bonus–Malus System (BMS) for automobile insurance, jointly considering claim frequency and claim severity within a Bayesian framework. In addition, a surplus process is simulated to estimate the ruin probability of an insurance company and to examine the relationship between initial capital and ruin probability. The results can be used as a guideline for determining the minimum initial capital in accordance with company policy, thereby supporting the stable and sustainable operation of insurance companies.

For claim frequency, this study proposes probability distribution functions constructed by mixing the Poisson distribution with the New Two Weighted Exponential distribution function and the Adaptive Cubic Rank Transmuted Exponential distribution function. Based on the proposed distributions, premium calculation models under a bonus–malus system are developed within a Bayesian framework. For claim severity, mixed probability distributions combining the gamma distribution with the New Two Weighted Exponential distribution function and the Adaptive Cubic Rank Transmuted Exponential distribution function are proposed. Similarly, Bayesian bonus–malus premium calculation models are developed based on these proposed severity distribution function.

The parameter estimation for the claim frequency and claim severity models is conducted using the maximum likelihood estimation (MLE) method. Model adequacy is assessed using three goodness-of-fit tests: the chi-square goodness-of-fit test, the Kolmogorov–Smirnov test and the Anderson–Darling test. In addition, model comparison is performed using the Akaike Information Criterion (AIC) and the Bayesian Information Criterion (BIC).

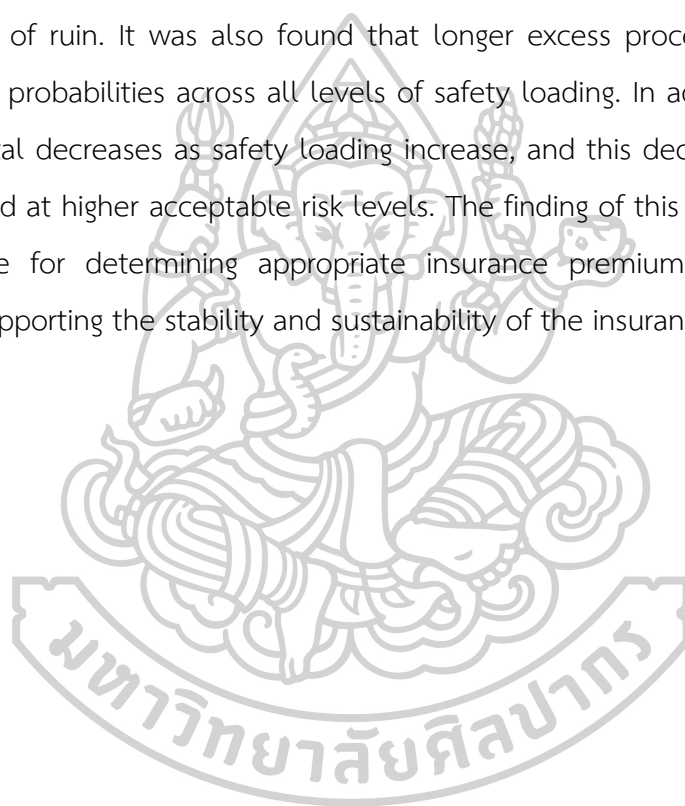
The Bayesian approach was employed to derive the posterior distributions function for both the claim frequency and claim severity models. The expected values of these posterior distributions were then used to estimate the insurance premiums. Specifically, the premium was calculated as the product of the expected claim frequency from the frequency component model and the expected claim severity from the severity component model.

The analysis of probability distribution functions for insurance claim frequency indicated that the Poisson – New Two weighted exponential distribution and the Poisson – Adaptive Cubic Rank transmuted Exponential distribution provided the best fit to the automobile insurance claim frequency data. Similarly, for claim severity, The Gamma – New Two weighted exponential distribution and the Gamma – Adaptive Cubic Rank transmuted Exponential distribution exhibited the best performance in capturing the characteristics of insurance claim severity.

The insurance premium for the claim frequency component was analyzed under a bonus–malus system using the Poisson–New Two Weighted Exponential distribution and the Poisson–Adaptive Cubic Rank Transmuted Exponential distribution. Under this system, the premium decreases when a policyholder reports no claims, while the premium increases when claims occur. Furthermore, determining insurance premiums by considering both the number of claims and severity of claims is concluded to be fairer than charging policyholders premiums based solely on the number of claims but also the severity of claims over the years the policyholder has been in the portfolio. In addition, different distributions of claim frequency and claim severity result in varying levels of stringency in premium

determination by insurers.

Considering the appropriate probability distribution function for describing the characteristics of claim severity data, the Gamma – New Two Weighted Exponential distribution was found to be suitable. Accordingly, the claim severity data were modeled using this distribution, which was then used to estimate the ruin probability in discrete-time risk processes over periods of 1 year, 3 years and 5 years. The results indicate that increases in initial capital and safety loading reduce the probability of ruin. It was also found that longer excess process durations lead to higher ruin probabilities across all levels of safety loading. In addition, the minimum initial capital decreases as safety loading increase, and this decrease becomes more pronounced at higher acceptable risk levels. The finding of this study can be used as a guideline for determining appropriate insurance premiums and initial capital, thereby supporting the stability and sustainability of the insurance business.



กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยฉบับนี้สามารถสำเร็จได้ด้วยดีจากความกรุณาอย่างยิ่งของ ผศ. ดร.อดิศักดิ์ เม้ามศรี เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ อาจารย์ ดร.กรรณิการ์ หิรัญกลี และ รศ. ดร.วีณากร เอี้ยวสานุรักษ์ ที่กรุณา ให้ความรู้ คำแนะนำ คำปรึกษา ข้อเสนอแนะและตลอดจนตรวจแก้ไขงานวิจัยให้มีความถูกต้อง และสมบูรณ์ยิ่งขึ้น ขอขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาสถิติทุกท่านที่กรุณาให้ความรู้ตลอดมา ขอขอบคุณ เจ้าหน้าที่ ห้องปฏิบัติการภาควิชาสถิติทุกท่านที่ให้ความช่วยเหลือ และคำแนะนำในการปฏิบัติงาน สุดท้ายขอขอบคุณบิดามารดา และครอบครัวของผู้วิจัย ที่สนับสนุนด้านการศึกษาคอยให้กำลังใจ และ คำปรึกษาตลอดมา จนกระทั่งงานวิจัย ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ขอขอบคุณมา ณ ที่นี้

จิรเมธ เอ็งเจริญสุข



สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	ช
กิตติกรรมประกาศ.....	ญ
สารบัญ.....	ฎ
สารบัญตาราง.....	ณ
สารบัญภาพ.....	ด
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ที่มาและความสำคัญ.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา.....	6
1.3 ขอบเขตของงานวิจัย.....	7
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	7
1.5 นิยามศัพท์.....	8
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	10
2.1 นิยามของตัวแปรสุ่มและการแจกแจงความน่าจะเป็นพื้นฐาน.....	10
2.1.1 การแจกแจงปัวซอง (Poisson distribution).....	12
2.1.2 การแจกแจงเลขชี้กำลัง (Exponential distribution).....	12
2.1.3 การแจกแจงแกมมา (Gamma distribution).....	13
2.1.4 การแจกแจงไวบูล (Weibull distribution).....	15
2.1.5 การแจกแจงลอการิธึม (Lognormal distribution).....	15
2.2 เทคนิคในการพัฒนาการแจกแจงความน่าจะเป็น (Techniques for developing probability distributions).....	16

2.2.1 การพัฒนาการแจกแจงความน่าจะเป็นโดยใช้เทคนิคตระกูล Transmuted Distribution.....	17
2.2.2 การพัฒนาการแจกแจงความน่าจะเป็นโดยใช้เทคนิค Azzalini	21
2.2.3 การพัฒนาการแจกแจงความน่าจะเป็นโดยใช้เทคนิคการผสมการแจกแจง (Mixing Distribution).....	24
2.3 การประมาณค่าพารามิเตอร์ (Parameters estimation)	25
2.4 การทดสอบภาวะสารูปดี	27
2.4.1 การทดสอบภาวะสารูปดีโดยสถิติไคกำลังสอง	27
2.4.2 การทดสอบภาวะสารูปดีโดยสถิติโครโมโกรอฟ-สมิรโนฟ.....	28
2.4.3 การทดสอบภาวะสารูปดีโดยสถิติแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิ่ง	29
2.4.4 เกณฑ์สารสนเทศของอะกะอิเกะ (Akaike Information Criteria: AIC).....	30
2.4.5 เกณฑ์สารสนเทศของเบส์ (Bayesian Information Criterion: BIC)	30
2.5 นิยามและทฤษฎีของเบย์เซียน	31
2.6 ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัย (BMS).....	32
2.6.1 การคำนวณเบี้ยประกันภัยภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัยที่ขึ้นอยู่กับองค์ประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน.....	32
2.6.2 การคำนวณเบี้ยประกันภัยภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัยที่ขึ้นอยู่กับองค์ประกอบจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน	34
2.6.3 หลักการคำนวณเบี้ยประกันภัย.....	38
2.7 การสร้างแบบจำลองข้อมูล.....	39
2.8 ตัวแบบความเสี่ยงภัย	40
2.8.1 ตัวแบบความเสี่ยงภัยแบบดั้งเดิม (Classical Risk Model)	41
2.8.2 กระบวนการความเสี่ยงสำหรับเวลาไม่ต่อเนื่อง (Discrete-time risk process)	42
2.9 การคำนวณค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายภายใต้ระยะเวลาจำกัด (Finite-time ruin probability).....	44

2.10 ฟังก์ชันเชิงประจักษ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการล้มละลายกับเงินทุนเริ่มต้น	45
2.11 การกำหนดเงินลงทุนเริ่มต้นขั้นต่ำ (Determining of Minimum Capital Reserve: MCR)	46
บทที่ 3 วิธีการดำเนินงานวิจัย	48
3.1 ข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย	48
3.1.1 ข้อมูลที่เกี่ยวกับจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน	48
3.1.2 ข้อมูลที่เกี่ยวกับมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน	49
3.2 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย	50
3.2.1 การสร้างฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นเพื่อใช้สำหรับอธิบายข้อมูลจำนวนครั้งและข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน	50
3.2.2 การสร้างตัวแบบคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย (BMS) โดยพิจารณาองค์ประกอบจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนร่วมกัน	52
3.2.3 การสร้างตัวแบบในการประมาณค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายและการกำหนดเงินทุนเริ่มต้นขั้นต่ำของบริษัทประกันภัย	53
บทที่ 4 ผลการวิจัย	58
4.1 ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นเพื่อใช้สำหรับอธิบายข้อมูลจำนวนครั้งและข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน	58
4.1.1 ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสำหรับข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน	59
4.1.2 ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสำหรับข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน	77
4.1.3 การวัดความเหมาะสมของตัวแบบสำหรับข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน	81
4.1.4 การวัดความเหมาะสมของตัวแบบสำหรับข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน	86

4.2 ตัวแบบคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย (BMS) โดยพิจารณาองค์ประกอบ จำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนร่วมกัน	91
4.2.1 ตัวแบบคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย (BMS) โดยพิจารณา องค์ประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนภายใต้ฟังก์ชันการแจก แจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (PNTWE)	91
4.2.2 ตัวแบบคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย (BMS) โดยพิจารณา องค์ประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนภายใต้ฟังก์ชันการแจก แจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (PACRTE)	95
4.2.3 ตัวแบบคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย (BMS) โดยพิจารณา องค์ประกอบจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนภายใต้ฟังก์ชันการ แจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (PNTWE) และฟังก์ชันการ แจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (GNTWE)	99
4.2.4 ตัวแบบคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย (BMS) โดยพิจารณา องค์ประกอบจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนภายใต้ฟังก์ชันการ แจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (PACRTE) และฟังก์ชัน การแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (GACRTE)	103
4.2.5 การกำหนดราคาเบี้ยประกัน	107
4.3 แบบจำลองในการประมาณค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายและการกำหนดเงินทุนเริ่มต้น ขั้นต่ำของบริษัทประกันภัย	113
4.3.1 การประมาณค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลาย	115
4.3.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่า ความน่าจะเป็นในการล้มละลายกับเงินทุนเริ่มต้น	120
4.3.3 การกำหนดเงินทุนเริ่มต้นที่ต่ำที่สุด	125
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ	130
5.1 สรุปผลการวิจัย	130
5.2 อภิปรายผลการวิจัย	132
5.3 ข้อเสนอแนะงานวิจัย	133

รายการอ้างอิง	135
ประวัติผู้เขียน	140



สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 1 แสดงสถิติพรรณนา (Descriptive statistics) ของข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่า สินไหมทดแทนทั้ง 3 ชุดข้อมูล.....	49
ตารางที่ 2 ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น (PMF) และฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (CDF) ของการแจกแจง จำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน	82
ตารางที่ 3 ความเหมาะสมของการแจกแจงความน่าจะเป็นทั้ง 5 การแจกแจง ในการอธิบายข้อมูล จำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนชุดที่ 1 โดยสถิติทดสอบไคกำลังสอง	83
ตารางที่ 4 ความเหมาะสมของการแจกแจงความน่าจะเป็นทั้ง 5 การแจกแจง ในการอธิบายข้อมูล จำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนชุดที่ 2 ด้วย โดยสถิติทดสอบไคกำลังสอง	84
ตารางที่ 5 ความเหมาะสมของการแจกแจงความน่าจะเป็นทั้ง 5 การแจกแจง ในการอธิบายข้อมูล จำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนชุดที่ 3 ด้วย โดยสถิติทดสอบไคกำลังสอง	85
ตารางที่ 6 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (PDF) และฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (CDF) ของ การแจกแจงมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน	86
ตารางที่ 7 ความเหมาะสมของการแจกแจงความน่าจะเป็นทั้ง 3 การแจกแจง ในการอธิบายข้อมูล มูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนชุดที่ 4 โดยใช้สถิติทดสอบโครโมโกรอฟ-สมิร์นอฟ (K-S) และ สถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง (A-D).....	87
ตารางที่ 8 ความเหมาะสมของการแจกแจงความน่าจะเป็นทั้ง 3 การแจกแจง ในการอธิบายข้อมูล มูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนชุดที่ 5 โดยใช้สถิติทดสอบโครโมโกรอฟ-สมิร์นอฟ (K-S) และ สถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง (A-D).....	89
ตารางที่ 9 แสดงเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยสำหรับจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหม ทดแทนโดยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก.....	107
ตารางที่ 10 แสดงเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยสำหรับจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่า สินไหมทดแทนโดยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ	109
ตารางที่ 11 แสดงเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยสำหรับจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่า สินไหมทดแทนโดยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก และมูลค่า	

ในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนโดยฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก โดยมีมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนรวม $S=300$ AUD.....	109
ตารางที่ 12 แสดงเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยสำหรับจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนโดยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก และมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนโดยฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก โดยมีมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนรวม $S=500$ AUD.....	110
ตารางที่ 13 แสดงเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยสำหรับจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนโดยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก และมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนโดยฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก โดยมีมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนรวม $S=1000$ AUD.....	111
ตารางที่ 14 แสดงเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยสำหรับจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนโดยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ และมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนโดยฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ โดยมีมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนรวม $S=300$ AUD.....	112
ตารางที่ 15 ค่าประมาณความน่าจะเป็นล้มละลายสำหรับกระบวนการส่วนเกินเวลา 1 ปี.....	116
ตารางที่ 16 ค่าประมาณความน่าจะเป็นล้มละลายสำหรับกระบวนการส่วนเกินเวลา 3 ปี.....	117
ตารางที่ 17 ค่าประมาณความน่าจะเป็นล้มละลายสำหรับกระบวนการส่วนเกินเวลา 5 ปี.....	119
ตารางที่ 18 ค่าประมาณพารามิเตอร์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังสำหรับการคำนวณค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายกรณี 1 ปี.....	121
ตารางที่ 19 ค่าประมาณพารามิเตอร์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังสำหรับการคำนวณค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายกรณี 3 ปี.....	122
ตารางที่ 20 ค่าประมาณพารามิเตอร์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังสำหรับการคำนวณค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายกรณี 5 ปี.....	124
ตารางที่ 21 เงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุด (MIC) สำหรับกระบวนการส่วนเกินกรณี 1 ปี ($n = 365$).....	125
ตารางที่ 22 เงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุด (MIC) สำหรับกระบวนการส่วนเกินกรณี 3 ปี ($n = 1,095$).....	126
ตารางที่ 23 เงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุด (MIC) สำหรับกระบวนการส่วนเกินกรณี 5 ปี ($n = 1,825$).....	128

สารบัญภาพ

หน้า

ภาพที่ 1 แสดงฟังก์ชันการแจกแจงเป้าหมายเป็นการแจกแจงปกติ (เส้นทึบสีน้ำเงิน), ฟังก์ชันการแจกแจงเสริม (เส้นประสีส้ม) เป็นการแจกแจงแกมมา และ blanket function (เส้นประสีม่วง) เมื่อกำหนด $c=m=3$	40
ภาพที่ 2 ขั้นตอนการดำเนินงานสำหรับการสร้างฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสำหรับอธิบายข้อมูลจำนวนครั้งและข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน.....	55
ภาพที่ 3 ขั้นตอนการดำเนินงานสำหรับการสร้างตัวแบบคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย (BMS) โดยพิจารณาองค์ประกอบจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนร่วมกัน.....	56
ภาพที่ 4 ขั้นตอนการดำเนินงานสำหรับการสร้างแบบจำลองในการประมาณค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายและการกำหนดเงินทุนเริ่มต้นขั้นต่ำของบริษัทประกันภัย	57
ภาพที่ 5 รูปร่างฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นของการแจกแจง PNTWED ที่ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ	61
ภาพที่ 6 แสดงรูปร่างฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นของการแจกแจง PACRTED ที่ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ	69
ภาพที่ 7 รูปร่างฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจง GNTWED ที่ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ.....	79
ภาพที่ 8 รูปร่างฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจง GACRTED ที่ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ.....	81
ภาพที่ 9 Probability-Probability plot of Gamma.....	88
ภาพที่ 10 Probability-Probability plot of Gamma-NTWE.....	88
ภาพที่ 11 Probability-Probability plot of Gamma-ACRTE.....	89
ภาพที่ 12 Probability-Probability plot of Gamma.....	90
ภาพที่ 13 Probability-Probability plot of Gamma_NTWE.....	90
ภาพที่ 14 Probability-Probability plot of Gamma_ACRTE.....	91

ภาพที่ 15 ฮิสโตแกรมแสดงมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน.....	114
ภาพที่ 16 ฮิสโตแกรมของมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเปรียบเทียบกับเส้นโค้งการแจกแจง แกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก	115
ภาพที่ 17 ความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการล้มละลายและเงินทุนเริ่มต้นกรณี 1 ปี.....	117
ภาพที่ 18 ความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการล้มละลายและเงินทุนเริ่มต้นกรณี 3 ปี.....	118
ภาพที่ 19 ความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการล้มละลายและเงินทุนเริ่มต้นกรณี 5 ปี.....	120
ภาพที่ 20 ความสัมพันธ์แบบเลขชี้กำลังระหว่างเงินทุนเริ่มต้นและความน่าจะเป็นในการล้มละลาย กรณี 1 ปี.....	122
ภาพที่ 21 ความสัมพันธ์แบบเลขชี้กำลังระหว่างเงินทุนเริ่มต้นและความน่าจะเป็นในการล้มละลาย กรณี 3 ปี.....	123
ภาพที่ 22 ความสัมพันธ์แบบเลขชี้กำลังระหว่างเงินทุนเริ่มต้นและความน่าจะเป็นในการล้มละลาย กรณี 5 ปี.....	125
ภาพที่ 23 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเผื่อความปลอดภัยและเงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุดสำหรับกระบวนการ ส่วนเกินกรณี 1 ปี.....	126
ภาพที่ 24 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเผื่อความปลอดภัยและเงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุดสำหรับกระบวนการ ส่วนเกินกรณี 3 ปี.....	127
ภาพที่ 25 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเผื่อความปลอดภัยและเงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุดสำหรับกระบวนการ ส่วนเกินกรณี 5 ปี.....	128

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

ในปัจจุบัน ข้อมูลถือเป็นทรัพยากรที่มีมูลค่าสูงและมีบทบาทสำคัญอย่างยิ่งในภาคธุรกิจ การเงิน และอุตสาหกรรมต่าง ๆ ทั่วโลก อย่างไรก็ตาม ด้วยลักษณะของข้อมูลปัจจุบันที่มีความ ซับซ้อนและมีมากมายหลายประเภท เพื่อให้เกิดการนำสารสนเทศจากข้อมูลมาใช้ให้เกิดประโยชน์ สูงสุดจำเป็นต้องเข้าใจถึงลักษณะของข้อมูลเสียก่อน ซึ่งมีวิธีมากมายในการทำความเข้าใจถึงลักษณะ ของข้อมูล ในทางสถิติการทำความเข้าใจและอธิบายลักษณะของข้อมูลจะศึกษาผ่านแนวคิดของตัว แปรสุ่ม (Random variable) โดยรูปแบบการกระจายตัวหรือพฤติกรรมของตัวแปรสุ่มนี้จะเรียกว่า การแจกแจงความน่าจะเป็น (Probability distribution) ของตัวแปรสุ่ม ดังนั้น การจะศึกษาและทำ ความเข้าใจลักษณะของข้อมูลสามารถศึกษาผ่านการแจกแจงความน่าจะเป็น ทั้งนี้การแจกแจงความ น่าจะเป็นมีมากมายหลายรูปแบบ ซึ่งลักษณะของการแจกแจงความน่าจะเป็นจะขึ้นอยู่กับประเภท ของตัวแปรสุ่มที่สนใจศึกษา อย่างไรก็ตาม แม้ว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นจะเป็นเครื่องมือที่สำคัญ ในการอธิบายลักษณะของข้อมูลในทางสถิติ แต่ในทางปฏิบัติ มักพบว่าข้อมูลมักมีลักษณะไม่ สอดคล้องกับคุณสมบัติของการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิม (Traditional probability distributions) หรือข้อมูลไม่ได้เป็นไปตามการแจกแจงความน่าจะเป็นที่กำหนด ได้แก่ ในการทดสอบ สมมติฐานทางสถิติ ข้อมูลมักตั้งอยู่ภายใต้ข้อสมมติของการแจกแจงแบบปกติ (Normal distribution) อย่างไรก็ตาม ในหลายกรณีมักพบว่าข้อมูลจริงมักไม่เป็นไปตามการแจกแจงดังกล่าว แม้กระทั่งข้อมูลที่มีลักษณะเบ้ (Skewed) ทางหนา (Heavy-tailed) หรือมีความแปรปรวนไม่เท่ากับ ค่าเฉลี่ย (ขัดต่อคุณสมบัติของตัวแปรสุ่มของที่มีการแจกแจงปัวซอง (Poisson distribution)) สิ่ง เหล่านี้ทำให้การแจกแจงความน่าจะเป็นไม่สามารถสะท้อนถึงลักษณะของข้อมูลได้เพียงพอ ดังนั้นเมื่อ ข้อมูลไม่ได้มีคุณสมบัติที่เป็นไปตามการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิมเหล่านี้ หรือกล่าวได้ว่าการ แจกแจงความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิมไม่สามารถอธิบายข้อมูลได้สอดคล้องกับลักษณะของข้อมูลจริง มัก ส่งผลให้เกิดความคลาดเคลื่อนต่อการวิเคราะห์ และลดความน่าเชื่อถือของผลลัพธ์ โดยเฉพาะเมื่อนำไปประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ที่ต้องใช้ความแม่นยำสูง เช่น ในการพยากรณ์ การกำหนดเบี้ย ประกัน หรือการประเมินความเสี่ยง

การสร้างและพัฒนาแจกแจงความน่าจะเป็นรูปแบบใหม่ (New probability distributions) ได้รับความสนใจอย่างกว้างขวางในสาขาสถิติและคณิตศาสตร์ประกันภัย เพื่อแก้ไขข้อจำกัดของการแจกแจงแบบดั้งเดิมที่ไม่สามารถอธิบายข้อมูลจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยเฉพาะในกรณีที่ข้อมูลมีลักษณะไม่สอดคล้องกับคุณสมบัติของการแจกแจงแบบดั้งเดิม เช่น ข้อมูลที่มีความเบ้ (Skewness) หรือข้อมูลที่มีการกระจายสูงหรือต่ำกว่าปกติ (Overdispersion or underdispersion) ซึ่งมักพบได้ทั่วไปในข้อมูลทางเศรษฐศาสตร์ การเงิน และประกันภัย การพัฒนาการแจกแจงใหม่เหล่านี้มีวัตถุประสงค์หลักเพื่อเพิ่มความยืดหยุ่นของตัวแบบทางสถิติ ให้สามารถสะท้อนพฤติกรรมของข้อมูลจริงได้ดียิ่งขึ้น ยกตัวอย่างในงานวิจัยของ กรีนวูดและยูล (Greenwood & Yule, 1920) ที่นำเสนอแนวคิดการผสมการแจกแจง (Mixing distribution) โดยเริ่มจากการพัฒนาการแจกแจงปัวซองแบบผสม (Mixed poisson distribution) เพื่อรองรับข้อมูลจำนวนนับที่มีความแปรปรวนไม่เท่ากับค่าเฉลี่ย ซึ่งไม่สอดคล้องกับคุณสมบัติของการแจกแจงปัวซองแบบดั้งเดิมซึ่งความแปรปรวนเท่ากับค่าเฉลี่ย (Equidispersion) ทำให้ตัวแบบที่พัฒนาขึ้นสามารถอธิบายลักษณะของข้อมูลได้อย่างเหมาะสมและยืดหยุ่นมากยิ่งขึ้น ในปี ค.ศ.1985 อาเซลลี อัสซาลินี (Azzalini, 1985) ได้นำเสนอเทคนิค Azzalini เพื่อช่วยปรับให้การแจกแจงความน่าจะเป็นที่สมมาตรให้มีลักษณะเบ้ได้ โดยยังคงลักษณะเฉพาะของการแจกแจงแบบดั้งเดิมไว้ ในปี ค.ศ.2009 กุปตะ และ กุนดู (Gupta & Kundu, 2009) ได้นำแนวคิดของ Azzalini ไปต่อยอดและพัฒนาใช้กับการแจกแจงแบบไม่สมมาตร เกิดเป็นแนวคิดการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังถ่วงน้ำหนัก (Weighted Exponential: WE) ในปี ค.ศ.2009 ฌอน และ บัคลีย์ (Shaw & Buckley, 2009) ได้นำเสนอการแจกแจงตระกูลใหม่ในชื่อ Transmuted Distribution ที่ช่วยปรับการแจกแจงให้มีความยืดหยุ่นมากยิ่งขึ้นในการนำไปใช้กับข้อมูลที่มีลักษณะทางหนา ซึ่งแต่ละเทคนิคและการแจกแจงที่พัฒนาขึ้นล้วนแล้วแต่เป็นความพยายามในการสร้างตัวแบบที่สามารถสะท้อนลักษณะของข้อมูลจริงได้ดียิ่งขึ้นด้วยเหตุนี้ การพัฒนาและขยายขอบเขตของการแจกแจงความน่าจะเป็นจึงมีคุณค่าเชิงทฤษฎีและประโยชน์เชิงประยุกต์อย่างยิ่ง โดยเฉพาะในบริบทของอุตสาหกรรมการเงินและการประกันภัย ซึ่งต้องการตัวแบบที่มีความแม่นยำในการประเมินความเสี่ยงและการคำนวณเบี้ยประกัน งานวิจัยนี้จึงมุ่งเน้นในการนำเสนอการแจกแจงความน่าจะเป็นรูปแบบใหม่ที่มีความยืดหยุ่น และสามารถสะท้อนลักษณะของข้อมูลจริงได้อย่างเหมาะสม เพื่อยกระดับความถูกต้องของการวิเคราะห์และการประยุกต์ใช้ในทางปฏิบัติได้อย่างมีประสิทธิภาพ

การประกันภัย เป็นวิธีการบริหารความเสี่ยง (Risk management) ที่มีความสำคัญ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อคุ้มครองชีวิตและทรัพย์สินของผู้เอาประกันภัย กล่าวคือ เมื่อผู้เอาประกันภัยได้รับความเสียหาย บริษัทประกันภัยจะต้องชดเชยค่าสินไหมทดแทนให้ตามเงื่อนไขที่ระบุไว้ในกรมธรรม์ ขณะเดียวกันผู้เอาประกันภัยมีหน้าที่ชำระ "เบี้ยประกันภัย" ให้แก่บริษัทประกันภัย เพื่อแลกกับสิทธิในการได้รับความคุ้มครองจากการสูญเสียดังกล่าว ทั้งนี้การคำนวณเบี้ยประกันถือเป็นพื้นฐานสำคัญของธุรกิจประกันภัย โดยเบี้ยประกันภัยที่กำหนดขึ้นควรจะมีความเป็นธรรมต่อผู้เอาประกันภัย หน้าที่ในการกำหนดเบี้ยประกันภัยนี้อยู่ภายใต้ความรับผิดชอบของนักคณิตศาสตร์ประกันภัย (Actuary) ซึ่งอาศัยหลักการทางคณิตศาสตร์และสถิติเพื่อสร้างตัวแบบที่เหมาะสมสำหรับการคำนวณเบี้ยประกันภัย อุตสาหกรรมประกันภัยโดยทั่วไปแบ่งออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ ๆ ได้แก่ ประกันชีวิต (life Insurance) และประกันวินาศภัย (non-life Insurance)

การประกันภัยรถยนต์ (Motor Insurance) เป็นหนึ่งในประเภทของการประกันวินาศภัยที่ให้ความคุ้มครองแก่ผู้เอาประกันภัย รวมถึงบุคคลภายนอกที่ได้รับผลกระทบจากการใช้รถยนต์ โดยเมื่อเกิดความเสียหายผู้เอาประกันภัยจะมีสิทธิในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนตามเงื่อนไขที่ระบุไว้ในกรมธรรม์ ขณะเดียวกันผู้เอาประกันภัยจำเป็นต้องชำระค่าเบี้ยประกันภัยเพื่อรักษาสินทรัพย์ในการได้รับความคุ้มครองดังกล่าว

การคำนวณเบี้ยประกันภัยมีหลากหลายวิธี หนึ่งในวิธีที่ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลาย คือ การคำนวณเบี้ยประกันภัยภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย (Bonus-Malus System: BMS) โดยมีแนวคิดให้ผู้เอาประกันภัยที่มีประวัติการขับขี่ดี เบี้ยประกันภัยที่ต้องชำระให้กับบริษัทประกันภัยในงวดถัดไปจะลดลงจากงวดก่อนหน้า แต่หากผู้เอาประกันภัยมีประวัติการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน เบี้ยประกันภัยที่ต้องชำระในงวดถัดไปจะเพิ่มขึ้นจากงวดก่อนหน้า แนวคิดของระบบคำนวณเบี้ยนี้ไม่เพียงช่วยให้ผู้ขับขี่มีความระมัดระวังมากขึ้นเท่านั้น แต่ยังส่งผลทางอ้อมในการลดจำนวนอุบัติเหตุบนท้องถนนอีกด้วย

การคำนวณเบี้ยประกันภัยใต้ระบบลดเบี้ยเพิ่มเบี้ย (BMS) แบบดั้งเดิมจะพิจารณาเพียงองค์ประกอบเดียวคือจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ซึ่งการคำนวณเบี้ยประกันด้วยองค์ประกอบนี้เพียงอย่างเดียวทำให้เกิดความไม่ยุติธรรมต่อผู้เอาประกันภัยทุกคน ยกตัวอย่างเช่น ในสถานการณ์แรก เมื่อผู้เอาประกันภัยรายที่ 1 มีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนจำนวน 1 ครั้งด้วยมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน 10,000 บาท และผู้เอาประกันภัยรายที่ 2 มีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนจำนวน 1 ครั้งด้วยมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน 20,000 บาท จะเห็นว่าใน

กรณีคำนวณเบี้ยประกันที่พิจารณาเพียงองค์ประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ผู้เอาประกันภัยรายที่ 1 และรายที่ 2 ต่างมีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนจำนวน 1 ครั้งเท่ากัน ทำให้เบี้ยประกันภัยที่ต้องจ่ายจึงเท่ากันในงวดถัดไป ซึ่งจะถือว่าไม่เป็นธรรมต่อผู้เอาประกันภัยรายที่ 1 ที่มีมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนน้อยกว่าผู้เอาประกันภัยรายที่ 2 ในสถานการณ์ที่สอง เมื่อผู้เอาประกันภัยรายที่ 1 มีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนจำนวน 2 ครั้งด้วยมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนทั้งหมด 30,000 บาท และผู้เอาประกันภัยรายที่ 2 มีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนจำนวน 1 ครั้งด้วยมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน 50,000 บาท จะเห็นว่าในกรณีคำนวณเบี้ยที่พิจารณาเพียงองค์ประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน เบี้ยประกันภัยที่ผู้เอาประกันภัยรายที่ 1 ต้องจ่ายจะมากกว่าผู้เอาประกันภัยรายที่ 2 เนื่องจากจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนที่มากกว่า ซึ่งจะเห็นได้ว่าไม่เป็นธรรมต่อผู้เอาประกันภัยรายที่ 1 ที่มีมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนน้อยกว่าผู้เอาประกันภัยรายที่ 2 จากประเด็นดังกล่าว ในงานนี้ได้พัฒนาตัวแบบความสูญเสียสำหรับการคำนวณเบี้ยประกันภัยของประกันภัยรถยนต์ โดยพิจารณาทั้งจำนวนครั้งและมูลค่าของการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนร่วมกัน เพื่อให้สะท้อนถึงระดับความเสี่ยงที่ผู้เอาประกันภัยต้องเผชิญได้อย่างแม่นยำ และช่วยส่งเสริมให้การกำหนดเบี้ยประกันภัยมีความเป็นธรรมมากยิ่งขึ้นสำหรับผู้เอาประกันภัยในแต่ละราย ขณะเดียวกันในมุมมองของบริษัทประกันภัย ความเสี่ยงด้านการจัดการทางการเงินถือเป็นอีกปัจจัยที่สำคัญที่ส่งผลกระทบต่อความอยู่รอดในการดำเนินกิจการต่อไปของบริษัทประกันภัย การบริหารความเสี่ยงจึงเป็นส่วนสำคัญและเป็นอีกหนึ่งความท้าทายที่บริษัทประกันภัย รวมถึงองค์กรต่าง ๆ ทั่วโลกต้องเผชิญ เพื่อประเมินและรักษาเสถียรภาพในการดำเนินกิจการต่อไปในระยะยาว

ในบริบทของการประกันภัย ความเสี่ยงไม่ได้จำกัดอยู่เพียงในฝั่งของผู้เอาประกันภัยเท่านั้น แต่ยังครอบคลุมถึงความเสี่ยงที่บริษัทประกันภัยเองต้องเผชิญ ด้วยเหตุนี้จึงต้องมีการวางแผนการรับมือกับความเสี่ยงที่อาจเกิดขึ้น โดยเฉพาะความเสี่ยงทางการเงินที่ส่งผลกระทบต่อความมั่นคงของบริษัท เช่น ความเสี่ยงจากการประเมินเบี้ยประกันที่ต่ำกว่าความเป็นจริง การจัดการเกี่ยวกับเงินทุนสำรองที่ไม่เพียงพอ หรือความผันผวนของจำนวนการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ซึ่งล้วนเป็นปัจจัยที่อาจส่งผลกระทบต่อความอยู่รอดของบริษัทประกันภัย การวางแผนและบริหารจัดการกับความเสี่ยงอย่างเป็นระบบจึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งสำหรับธุรกิจประกันภัย ซึ่งหนึ่งในแนวทางสำคัญคือการพัฒนาตัวแบบความเสี่ยงที่สามารถสะท้อนถึงพฤติกรรมและความไม่แน่นอนของข้อมูลที่เกี่ยวข้อง เพื่อช่วยในการประเมินสถานการณ์และตัดสินใจเชิงกลยุทธ์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ตัวแบบความเสี่ยง (Risk model) เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์และสถิติที่ใช้สำหรับการวิเคราะห์ ประเมิน และคาดการณ์ผลกระทบจากเหตุการณ์ที่ไม่แน่นอนที่อาจส่งผลต่อเป้าหมายหรือความมั่นคงของบริษัทประกันภัย เช่น ความสูญเสียทางการเงิน ความสูญเสียทางกฎหมาย รวมถึงความสูญเสียอื่น ๆ ที่บริษัทต้องเผชิญ หรือแม้กระทั่งความสูญเสียที่ร้ายแรงที่สุดคือความสูญเสียอันเนื่องมาจากการล้มละลายของบริษัทประกันภัย ด้วยเหตุนี้ในปี ค.ศ. 1903 มีนักคณิตศาสตร์ประกันภัยชาวสวีเดนชื่อ ฟลิท ลุนด์เบิร์ก ได้วางรากฐานเกี่ยวกับทฤษฎีความเสี่ยง (Risk theory) ด้วยตัวแบบสำหรับประกันวินาศภัย โดยให้ความสำคัญที่ความสูญเสียอันเนื่องมาจากมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนที่บริษัทประกันภัยต้องจ่ายให้กับผู้เอาประกันภัย ซึ่งเป็นปัจจัยที่มีความสำคัญโดยตรงต่อเงินทุนสำรองและเสถียรภาพทางการเงินของบริษัทซึ่งตัวแบบความเสี่ยงแบบดั้งเดิม ความน่าจะเป็นในการล้มละลายภายใต้ระยะเวลา T_n โดยที่ $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ กระบวนการส่วนเกิน (Surplus process) หรือกระบวนการความเสี่ยงแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง (Discrete-time risk process) ถูกนิยามไว้ดังนี้

$$U_n = u + cT_n - \sum_{k=1}^n y_k, \quad U_0 = u, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

โดยที่ u แทนเงินทุนเริ่มต้น

c แทนอัตราเบี้ยประกัน

y_k แทนมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ณ เวลา T_n

เมื่อ k แทนจำนวนครั้งที่เกิดการเรียกร้องค่าสินไหม ณ เวลา T_n

T_n แทนระยะเวลาที่สนใจศึกษา โดยที่ $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$

ต่อมาในปี 2006 โดย ชาน และ จาง ได้นำเสนอตัวแบบความเสี่ยงแบบไม่ต่อเนื่อง ภายใต้ข้อสมมติ $T_n = n$ เมื่อ n แทนระยะเวลาในการประเมินความเสี่ยงจากตัวแบบ ซึ่งหมายถึงการประเมินความเสี่ยงในช่วงเวลาคงที่ เช่น รายเดือน รายไตรมาส หรือรายปี จุดประสงค์หลักในการพัฒนาตัวแบบความเสี่ยงเพื่อให้สามารถนำตัวแบบไปใช้ประเมินความน่าจะเป็นในการล้มละลายของบริษัทประกันภัยภายใต้ระยะเวลาจำกัด หรือก็คือเพื่อประเมินความอยู่รอดของบริษัท ภายใต้ความสัมพันธ์ระหว่างมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน เงินทุนเริ่มต้น รวมไปถึงปัจจัยเกี่ยวกับค่าเบี้ยประกันที่บริษัทได้รับจากผู้เอาประกันภัย และค่าเผื่อความปลอดภัยที่บริษัทกำหนด การนำตัวแบบไปใช้ในบริษัทประกันภัยจะทำให้สามารถวางแผนและรับมือกับสถานการณ์ที่ไม่คาดคิดได้อย่างแม่นยำและมีประสิทธิภาพ การบริหารและจัดการความเสี่ยงทั้งจากฝั่งผู้เอาประกันภัยและบริษัทประกันภัย จึงถือเป็นหัวใจสำคัญของการดำเนินธุรกิจประกันภัย

ในงานวิจัยนี้ได้ทำการสร้างการแจกแจงความน่าจะเป็นรูปแบบใหม่สำหรับอธิบายข้อมูล ความสูญเสียทางประกันภัย โดยแบ่งออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่ การแจกแจงสำหรับจำนวนครั้งในการ เรียกร้องค่าสินไหมทดแทน และการแจกแจงสำหรับมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ที่สร้าง จากเทคนิคทางคณิตศาสตร์และสถิติ 3 แนวทางหลัก ได้แก่ เทคนิค Azzalini เทคนิคตระกูล Transmuted Distribution และเทคนิคการผสมการแจกแจง (Mixing distribution) เพื่อให้ได้มาซึ่ง การแจกแจงความน่าจะเป็นที่สะท้อนถึงลักษณะของข้อมูลจริงทางประกันภัยได้อย่างมีประสิทธิภาพ หลังจากนั้นได้นำการแจกแจงที่สร้างขึ้นใหม่ไปหาคุณสมบัติต่าง ๆ ของการแจกแจงความน่าจะเป็น และทดสอบความเหมาะสมของการแจกแจงในการอธิบายข้อมูลจริงที่เกี่ยวกับความสูญเสียทาง ประกันภัย ต่อมาได้้นำการแจกแจงที่สร้างขึ้นใหม่ไปประยุกต์ใช้ในการสร้างตัวแบบสำหรับคำนวณเบี้ย ประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย (BMS) ที่พิจารณาทั้งองค์ประกอบจำนวนครั้งและมูลค่าในการ เรียกร้องค่าสินไหมทดแทน โดยใช้การคำนวณค่าเบี้ยประกันจากวิธีการของเบย์เซียน (Bayesian method) ซึ่งจะ使得เบี้ยประกันที่ได้มีความเหมาะสมและสอดคล้องกับประวัติการเรียกร้องค่า สินไหมทดแทนจากผู้เอาประกันภัยมากยิ่งขึ้น อีกทั้งยังส่งเสริมพฤติกรรมการขับขี่โดยให้รางวัลผ่าน การลดเบี้ยประกันสำหรับผู้ขับขี่ที่มีประวัติดี นอกจากนี้ยังได้นำการแจกแจงที่เหมาะสมสำหรับมูลค่า ในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนไปใช้ในการสร้างตัวแบบในการประมาณค่าความน่าจะเป็นในการ ล้มละลายของบริษัทประกันภัย ภายใต้กระบวนการส่วนเกิน (Surplus process) โดยพิจารณาปัจจัย สำคัญได้แก่ มูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน อัตราเบี้ยประกันที่เรียกเก็บ ค่าเผื่อความ ปลอดภัย และเงินทุนเริ่มต้น จากตัวแบบดังกล่าว ผู้วิจัยได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็น ในการล้มละลายกับเงินทุนเริ่มต้น เพื่อนำไปใช้ในการกำหนดค่าเงินทุนเริ่มต้นขั้นต่ำที่เหมาะสม ซึ่งตัว แบบดังกล่าวสามารถใช้เป็นแนวทางในการวางแผนกลยุทธ์ เพื่อให้การดำเนินงานกิจการของบริษัท ประกันภัยเป็นไปอย่างมั่นคงภายใต้ระดับความเสี่ยงที่ยอมรับได้

1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

1.2.1 เพื่อสร้างฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของความสูญเสียทางประกันภัยให้ สอดคล้องกับข้อมูลการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ได้แก่ ข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหม ทดแทนและข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

1.2.2 เพื่อเปรียบเทียบความเหมาะสมของการแจกแจงที่นำเสนอกับการแจกแจงแบบดั้งเดิม สำหรับข้อมูลความสูญเสียทางประกันภัย

1.2.3 เพื่อสร้างตัวแบบสำหรับการคำนวณเบี้ยประกันแบบลดเบี้ย - เพิ่มเบี้ย โดยพิจารณาทั้งจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนร่วมกัน

1.2.4 เพื่อคำนวณค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายโดยใช้ข้อมูลที่จำลองจากการแจกแจงที่เหมาะสมสำหรับข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

1.2.5 เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเงินทุนเริ่มต้นกับความน่าจะเป็นในการล้มละลายภายใต้ค่าเพื่อความปลอดภัยที่แตกต่างกัน และกำหนดเงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุดภายใต้ความเสี่ยงที่บริษัทประกันภัยยอมรับได้

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

ในงานวิจัยนี้ได้คำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย - เพิ่มเบี้ย โดยศึกษาภายใต้หลักการของเบย์เซียนซึ่งอาศัยการผสมการแจกแจงของจำนวนครั้งและผสมการแจกแจงของมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนกับการแจกแจงก่อน โดยการแจกแจงก่อนที่ใช้ในส่วนของการแจกแจงจำนวนครั้งและส่วนของมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน มี 2 การแจกแจง ได้แก่ การแจกแจงเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (New Two Weighted Exponential Distribution: NTWED) และการแจกแจงเลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสาม นอกจากนี้ยังได้มีการจำลองข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนแบบรายวันจากการแจกแจงที่เหมาะสมด้วยวิธี Acceptance-rejection ซึ่งถูกจำลองภายใต้ระยะเวลา 1 ปี ($n=365$) 3 ปี ($n=1,095$) และ 5 ปี ($n=1,825$) เมื่อ n แทนจำนวนวันที่กำหนด โดยมีการกำหนดเงินทุนเริ่มต้น (u) สำหรับการคำนวณความน่าจะเป็นในการล้มละลายมีค่าเท่ากับ 10000, 20000, 30000, ..., 100000 บาท และค่าเพื่อความปลอดภัยเท่ากับ 0.10, 0.15, 0.20, ..., 0.30 ภายใต้ความเสี่ยงที่ยอมรับได้มีค่าเท่ากับ 0.01, 0.05 และ 0.10 โดยมีข้อสมมติเบื้องต้นว่าการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนในแต่ละครั้งจากแต่ละบุคคลเป็นอิสระกัน และจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของแต่ละบุคคลเป็นอิสระต่อกัน

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 บริษัทประกันภัยสามารถนำฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของความสูญเสียทางประกันภัย อันเนื่องมาจากจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเพื่อนำไปประยุกต์สำหรับการสร้างรูปแบบคำนวณเบี้ยสำหรับประกันภัยในประเภทอื่นได้

1.4.2 สามารถนำตัวแบบจากงานวิจัยนี้ไปใช้ในการคำนวณเบี้ยประกันที่เรียกเก็บจากผู้เอาประกันแต่ละรายได้สอดคล้องกับประวัติการขับที่จริง ทำให้เบี้ยประกันที่ผู้เอาประกันจ่ายให้กับบริษัทประกันมีความเหมาะสม

1.4.3 บริษัทประกันสามารถนำฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของการสูญเสียไปประยุกต์ใช้ในการสร้างรูปแบบคำนวณเบี้ยสำหรับประกันภัยในประเภทอื่นได้ อีกทั้งยังช่วยส่งเสริมให้เกิดการแข่งขันในตลาดประกันภัย เนื่องจากบริษัทประกันที่สามารถกำหนดเบี้ยได้แม่นยำและยุติธรรมจะมีความได้เปรียบในการแข่งขัน เพราะสามารถเสนอราคาที่ตั้งดูถูกค่าได้โดยไม่ส่งผลกระทบต่อความมั่นคงทางการเงินของบริษัท

1.4.4 ช่วยให้บริษัทประกันสามารถวางแผนการรับมือกับความเสี่ยงจากมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยอาศัยการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมาะสม อีกทั้งช่วยในการวางแผนการกำหนดเงินทุนเริ่มต้นในระดับต่ำที่สุดสำหรับบริษัทประกันที่ต้องการจะเริ่มกิจการ หรือสำหรับนักลงทุนที่ต้องการเปิดธุรกิจทางด้านประกันภัย ภายใต้ระดับความเสี่ยงที่ยอมรับได้

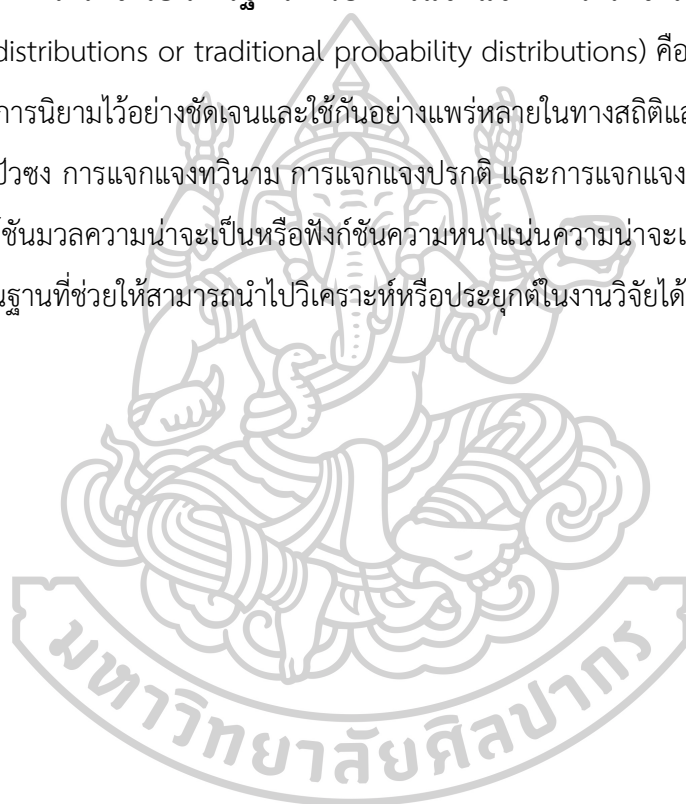
1.5 นิยามศัพท์

การแจกแจงหางหนา (Heavy-tailed distribution) คือ การแจกแจงของข้อมูลหรือฟังก์ชันความน่าจะเป็นที่มี “หาง” (tail) ลดลงช้ากว่าการแจกแจงทั่วไป เช่น การแจกแจงแบบปรกติหรือเลขชี้กำลัง ส่งผลให้มีโอกาสเกิดค่าที่สุดโต่ง (Extreme values) สูงกว่าปกติ ตัวอย่างของการแจกแจงที่มีลักษณะหางหนา ได้แก่ การแจกแจงพาเรโต (Pareto distribution) การแจกแจงโคชี (Cauchy distribution) และบางกรณีของการแจกแจงไวบูล (Weibull distribution) ทั้งนี้ ข้อมูลที่มีลักษณะสอดคล้องกับการแจกแจงประเภทหางหนามักพบในอุตสาหกรรมการเงิน การประกันภัย หรือในการวิเคราะห์ที่เกี่ยวข้องกับความเสี่ยง

เงินทุนสำรอง (Capital reserve) คือ จำนวนเงินหรือส่วนหนึ่งของกำไรที่บริษัทจัดสรรไว้สำหรับวัตถุประสงค์เพื่อเสริมสร้างเสถียรภาพทางการเงินของบริษัท โดยเฉพาะอย่างยิ่งในธุรกิจประกันภัย เงินทุนสำรองมีบทบาทสำคัญในการรองรับค่าใช้จ่ายที่ไม่คาดคิด เช่น มูลค่าการเรียกร้องค่าสินไหมที่อาจผันผวน นอกจากนี้ยังทำหน้าที่เป็นเบาะรองรับความสูญเสียที่อาจเกิดขึ้นในอนาคต และเป็นเครื่องมือสำคัญในการบริหารความเสี่ยงอย่างมีประสิทธิภาพ

ค่าเผื่อความปลอดภัย (Safety loading) คือ จำนวนเงินที่เพิ่มจากเบี้ยประกันภัยสุทธิ (Net premium) เพื่อรองรับความไม่แน่นอนที่อาจเกิดขึ้นจากความผันผวนของอัตราการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน มูลค่าความเสียหายที่สูงกว่าคาดการณ์ หรือความไม่แน่นอนอื่น ๆ ที่อาจส่งผลกระทบต่อผลประกอบการของบริษัทประกันภัย ตามหลักการคณิตศาสตร์ประกันภัย ค่าเผื่อความปลอดภัยมักอยู่ในช่วง 5% – 30% ของเบี้ยสุทธิ ขึ้นอยู่กับประเภทของประกันภัย และความเสี่ยงของกลุ่มผู้เอาประกัน

การแจกแจงความน่าจะเป็นพื้นฐาน หรือ การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิม (Base probability distributions or traditional probability distributions) คือรูปแบบการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่มีการนิยามไว้อย่างชัดเจนและใช้กันอย่างแพร่หลายในทางสถิติและคณิตศาสตร์ เช่น การแจกแจงแบบปัวซอง การแจกแจงทวินาม การแจกแจงปรกติ และการแจกแจงเลขชี้กำลัง ซึ่งแต่ละการแจกแจงมีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นหรือฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นที่เฉพาะเจาะจง และมีคุณสมบัติพื้นฐานที่ช่วยให้สามารถนำไปวิเคราะห์หรือประยุกต์ในงานวิจัยได้



บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 นิยามของตัวแปรสุ่มและการแจกแจงความน่าจะเป็นพื้นฐาน

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงภาพรวมของตัวแปรสุ่ม รวมไปถึงฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น พร้อมทั้งแสดงคุณสมบัติพื้นฐานบางประการของแต่ละการแจกแจงความน่าจะเป็นทั้งในกรณีแบบไม่ต่อเนื่องและแบบต่อเนื่อง ซึ่งได้นำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษานี้

บทนิยาม 2.1 ให้ S แทน ปริภูมิตัวอย่าง และ X เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่ถูกกำหนดบนปริภูมิตัวอย่าง S แล้วจะเรียก X ว่า “ตัวแปรสุ่ม (Random variable)”

จากนิยามของตัวแปรสุ่ม โดเมนของตัวแปรสุ่มคือค่าที่อยู่ภายในปริภูมิตัวอย่าง S และมีเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$

ประเภทของตัวแปรสุ่ม มีด้วยกัน 2 ประเภท

1. ตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete random variable)

บทนิยาม 2.2 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม ถ้าเรนจ์ของฟังก์ชันค่าจริง X เป็นจำนวนที่นับได้และมีจำกัด (Countable finite) หรือจำนวนที่นับได้และมีไม่จำกัด (Countable Infinite) เราเรียก X ว่า ตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

บทนิยาม 2.3 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น (Probability Mass Function : PMF) ของ X หรือ $p(x) = P(X = x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่สอดคล้องกับสมบัติ 2 ข้อต่อไปนี้

$$1. 0 \leq p(x) \leq 1 \text{ สำหรับแต่ละค่าของ } x \text{ ในโดเมนของ } X$$

$$2. \sum_{x \in \mathbb{R}} p(x) = 1$$

บทนิยาม 2.4 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม (แบบต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่อง) จะเรียกฟังก์ชัน F ซึ่ง $F_X(x) = Pr(X \leq x)$ ว่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (Cumulative Distribution Function : CDF) ของ X

ทฤษฎีบท 2.1 $F_X(x)$ เป็นฟังก์ชันฟังก์ชันการแจกแจงสะสม ก็ต่อเมื่อ เป็นไปตามเงื่อนไขทั้ง 3 ข้อดังนี้

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$
2. $F_X(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่ลดลงของ x
3. $F_X(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวา

บทนิยาม 2.5 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง และมี $p(x)$ เป็นฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น ค่าคาดหวัง (Expected value) ของตัวแปรสุ่ม X กำหนดโดย

$$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x p(x) \quad (2.1)$$

บทนิยาม 2.6 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น $p(x)$ และค่าเฉลี่ย μ แล้ว σ^2 หรือ $Var(X)$ คือความแปรปรวน (Variance) ของ X โดย

$$\sigma^2 = Var(X) = E[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in \mathbb{R}} (x - \mu)^2 p(x) \quad (2.2)$$

2. ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง (Continuous random variable)

บทนิยาม 2.7 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม ถ้าเรนจ์ของฟังก์ชันค่าจริง X เป็นจำนวนจริงที่ต่อเนื่อง (Continuous Real Number) เราเรียก X ว่า ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

บทนิยาม 2.8 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (Probability Density Function : PDF) ของ X หรือ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่สอดคล้องกับสมบัติ 2 ข้อต่อไปนี้

1. $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ในโดเมนของ X
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

บทนิยาม 2.9 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง และมี $f(x)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น ค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม X กำหนดโดย

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (2.3)$$

บทนิยาม 2.10 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f(x)$ และค่าเฉลี่ย μ แล้ว σ^2 หรือ $Var(X)$ คือความแปรปรวน (Variance) ของ X โดย

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad (2.4)$$

2.1.1 การแจกแจงปัวซอง (Poisson distribution)

การแจกแจงปัวซองเป็นการแจกแจงที่มีแนวคิดมาจากกระบวนการปัวซอง (Poisson process) ที่เป็นกระบวนการทางสโตแคสติก ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของกระบวนการนับ (Count process) การแจกแจงปัวซองเป็นหนึ่งใน การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่องที่นิยมใช้อย่างแพร่หลายในการอธิบายลักษณะของข้อมูลที่เป็นจำนวนนับ (Count data) เช่น จำนวนครั้งในการเกิดเหตุการณ์ที่สนใจภายในช่วงเวลาหรืออาณาบริเวณที่กำหนด ยิ่งในด้านประกันภัยที่ลักษณะข้อมูลของการเกิดเหตุการณ์ต่างๆ เป็นจำนวนนับ ยกตัวอย่างเช่น จำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

สมมติให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปัวซอง โดยที่ X แทนจำนวนครั้งของการเกิดเหตุการณ์ที่สนใจภายในระยะเวลาที่กำหนด และค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งในการเกิดเหตุการณ์ภายในหนึ่งหน่วยเวลา แทนด้วย λ ซึ่งเป็นพารามิเตอร์บ่งบอกตำแหน่ง (Location parameter) เขียนแทนด้วย $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นของ X แสดงดังนี้

$$P(X = x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} ; \lambda > 0, x = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

ค่าคาดหวังของ $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ คือ $E(X) = \lambda$

ความแปรปรวนของ $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ คือ $\text{Var}(X) = \lambda$

หมายเหตุ: กระบวนการปัวซองเป็นกรณีหนึ่งในกระบวนการนับ $\{N(t), t \geq 0\}$ ซึ่งมีฟังก์ชันอัตรา $\lambda(t)$ คงที่ เวลาระหว่างการเกิดเหตุการณ์จะเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเลขชี้กำลัง ซึ่งจะนำเสนอในหัวข้อต่อไป ทั้งนี้กระบวนการนับจะเป็นกระบวนการปัวซองก็ต่อเมื่อมีคุณสมบัติส่วนเพิ่มนิ่ง (Stationary Increment) และส่วนเพิ่มอิสระ (Independent Increment)

2.1.2 การแจกแจงเลขชี้กำลัง (Exponential distribution)

การแจกแจงเลขชี้กำลังเป็นหนึ่งใน การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่ใช้กันอย่างแพร่หลายดังที่ได้กล่าวไปข้างต้น เมื่อพิจารณาถึงกระบวนการปัวซองที่มีอัตราการเกิดเหตุการณ์

ในหนึ่งหน่วยเวลา แทนด้วย λ แล้วระยะเวลาการรอคอยระหว่างการเกิดเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ในกระบวนการปัวซองนั้นจะมีการแจกแจงเลขชี้กำลังด้วยระยะเวลาเฉลี่ย $\frac{1}{\lambda}$ การแจกแจงเลขชี้กำลังถูกนำมาใช้ในการอธิบายระยะเวลาระหว่างการรอคอยจนเกิดเหตุการณ์ที่สนใจ ในหลากหลายสาขาวิชาได้นำการแจกแจงเลขชี้กำลังไปประยุกต์ใช้ในการอธิบายลักษณะของข้อมูลหลากหลายประเภท โดยเฉพาะในการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ประกันภัย ซึ่งเป็นการแจกแจงที่เหมาะสมในการทำฟังก์ชันการแจกแจงความสูญเสีย (Loss distribution) ทางประกันภัย เนื่องจากข้อมูลทางด้านประกันภัยมีลักษณะที่ลู่เข้าสู่ศูนย์ช้า หรือที่เรียกว่าการแจกแจงประเภทหางหนา (Heavy-tailed distribution)

สมมติให้ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเลขชี้กำลัง โดยที่ Y แทนระยะเวลาของการเกิดเหตุการณ์ที่สนใจภายในระยะเวลาที่กำหนด ด้วยค่าเฉลี่ยระยะเวลาการเกิดเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ คือ $\frac{1}{\lambda} = \beta$ เมื่อ β เป็นพารามิเตอร์บ่งบอกอัตรา (Rate parameter) เขียนแทนด้วย $Y \sim \text{Exp}(\beta)$ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของ Y แสดงดังนี้

$$f_Y(y; \beta) = \beta e^{-\beta y} ; \beta > 0, y > 0 \quad (2.6)$$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของ $Y \sim \text{Exp}(\beta)$ กำหนดโดย

$$F_Y(y; \beta) = 1 - e^{-\beta y} ; y > 0 \quad (2.7)$$

ค่าคาดหวังของ $Y \sim \text{Exp}(\beta)$ คือ $E(Y) = \frac{1}{\beta}$

ความแปรปรวนของ $Y \sim \text{Exp}(\beta)$ คือ $\text{Var}(Y) = \frac{1}{\beta^2}$

2.1.3 การแจกแจงแกมมา (Gamma distribution)

การแจกแจงแกมมา หรือการแจกแจงเออร์แลง (Erlang distribution) อย่างที่ได้กล่าวมาในหัวข้อก่อนหน้าเมื่อพิจารณาระยะเวลาระหว่างการเกิดเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ภายในระยะเวลาที่กำหนด ระยะเวลาเหล่านั้นจะเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเลขชี้กำลัง ด้วยพารามิเตอร์ β ที่บ่งบอกระยะเวลาเฉลี่ยของการเกิดเหตุการณ์ แต่เมื่อพิจารณาถึงระยะเวลาระหว่างการเกิดเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ที่สนใจ สำเร็จครบจำนวนครั้งที่กำหนด (α) จะมีการแจกแจงแกมมา ด้วยพารามิเตอร์ α และ β ตามลำดับ การแจกแจงแกมมาเป็นการแจกแจงประเภทหางหนากว่าการแจกแจงเลขชี้กำลัง จะสังเกตได้จากโค้งการแจกแจงแกมมาที่มีลักษณะลู่เข้าสู่ศูนย์ได้ช้ากว่า ผู้วิจัยจึงสนใจการแจกแจงนี้มาใช้ในการศึกษาหาฟังก์ชันการสูญเสียทางประกันภัย

ฟังก์ชันแกมมา (Gamma function)

ในกรณีที่การแจกแจงไม่สามารถทำการหาปริพันธ์เพื่อหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมได้หรือไม่สามารถหาผลลัพธ์ให้อยู่ในรูปแบบปิดได้ ทางเลือกหนึ่งในวิธีการแก้ปัญหาดังกล่าวคือการจัดรูปให้อยู่ในรูปแบบฟังก์ชันแกมมา ซึ่งฟังก์ชันแกมมาได้อนุกรมขึ้น เมื่อค่าที่เป็นไปได้ของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0, \infty)$ แสดงได้ดังนี้

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \quad (2.8)$$

คุณสมบัติบางประการของฟังก์ชันแกมมา

- 1) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก
- 2) $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$
- 3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

สมมติให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแกมมา โดย X แทนระยะเวลาของการเกิดเหตุการณ์ที่สนใจสำเร็จครบ α ครั้งภายในระยะเวลาที่กำหนด ด้วยระยะเวลารอการเกิดเหตุการณ์เฉลี่ย β เมื่อ $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของ X แสดงดังนี้

$$f_X(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad ; \alpha > 0, \beta > 0, x > 0 \quad (2.9)$$

เมื่อกำหนดค่าพารามิเตอร์ $\alpha = 1$ ลงในสมการข้างต้น จะลดรูปเป็นการแจกแจงเลขชี้กำลัง หรือกล่าวได้ว่าการแจกแจงเลขชี้กำลังเป็นหนึ่งในกรณีเฉพาะของการแจกแจงแกมมา โดยที่ α เป็นพารามิเตอร์บ่งบอกรูปร่าง (Shape parameter) และ β เป็นพารามิเตอร์บ่งบอกอัตรา (Rate parameter) ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของ $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ กำหนดโดย

$$F_X(x; \alpha, \beta) = \int_0^x f_X(t; \alpha, \beta) dt \quad ; \alpha > 0, \beta > 0, x > 0 \quad (2.10)$$

เมื่อ $f_X(t; \alpha, \beta)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของ X ที่จุด $x = t$

ค่าคาดหวังของ $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ คือ $E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$

ความแปรปรวนของ $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ คือ $\text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$

2.1.4 การแจกแจงไวบูล (Weibull distribution)

การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงทางสถิติที่มักใช้ในตัวแบบการวิเคราะห์ความน่าเชื่อถือ (Reliability analysis models) การวิเคราะห์อายุการใช้งาน (Life Data Analysis) ในอุตสาหกรรม และการวิเคราะห์ความเสี่ยง (Risk analysis) การแจกแจงนี้มีพารามิเตอร์ด้วยกัน 2 ตัว คือ k เป็นพารามิเตอร์บ่งบอกรูปร่าง มีหน้าที่ปรับรูปร่างของการแจกแจง และ γ เป็นพารามิเตอร์บ่งบอกสเกล (Scale parameter) ที่ควบคุมขนาดของการแจกแจง เนื่องจากการแจกแจงไวบูลสามารถปรับรูปร่างการแจกแจงได้หลากหลาย ทำให้มีความยืดหยุ่นกับข้อมูลหลากหลายประเภททั้งในกรณีที่ข้อมูลมีลักษณะการกระจายแบบสมมาตรหรือมีการเบ้ซ้าย-เบ้ขวา นอกจากนี้การแจกแจงไวบูลยังเหมาะสำหรับการสร้างตัวแบบความเสี่ยงทางประกันภัย เนื่องจากการแจกแจงที่รูปร่างโค้ง มีลักษณะเบ้ขวา และจัดอยู่ในกลุ่มการแจกแจงประเภทหางหนานอีกด้วย

สมมติให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงไวบูลด้วยพารามิเตอร์ k และ γ เขียนแทนด้วย $X \sim \text{WB}(\gamma, k)$ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของ X แสดงดังนี้

$$f_X(x; \gamma, k) = \frac{k}{\gamma} \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^k}; \gamma, k > 0, x > 0 \quad (2.11)$$

เมื่อกำหนดค่าพารามิเตอร์ $k = 1$ จะลดรูปเป็นการแจกแจงเลขชี้กำลังที่มีพารามิเตอร์เท่ากับ γ โดยที่ γ เป็นพารามิเตอร์บ่งบอกสเกล หรือกล่าวได้ว่าการแจกแจงเลขชี้กำลังเป็นหนึ่งในกรณีเฉพาะของการแจกแจงไวบูล

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของ $X \sim \text{WB}(\gamma, k)$ กำหนดโดย

$$F_X(x; \gamma, k) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^k}; \gamma, k > 0, x > 0 \quad (2.12)$$

ค่าคาดหวังของ $X \sim \text{WB}(\gamma, k)$ คือ $E(X) = \lambda \Gamma(1 + \frac{1}{k})$

ความแปรปรวนของ $X \sim \text{WB}(\gamma, k)$ คือ $Var(X) = \lambda^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)^2 \right]$

2.1.5 การแจกแจงล็อกนอร์มัล (Lognormal distribution)

การแจกแจงล็อกนอร์มัลเป็นการแจกแจงที่มีความเกี่ยวข้องกับการแจกแจงปกติ (Normal distribution) โดยทั่วไปการแจกแจงปกติจะเหมาะสมสำหรับข้อมูลที่มีลักษณะการกระจายสมมาตร แต่หากข้อมูลไม่ได้มีลักษณะการกระจายแบบสมมาตรการแจกแจงปกติอาจไม่เหมาะสม ดังนั้นการ

แจกแจงลอการิธึมจึงเป็นทางเลือกที่ดีสำหรับอธิบายข้อมูลลักษณะดังกล่าว การแจกแจงลอการิธึมเป็นการแจกแจงที่ตัวแปรสุ่มมีค่าที่เป็นไปได้อยู่บนจำนวนจริงบวกเท่านั้น โดยค่าที่เป็นไปได้เกิดจากการแปลงตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงปกติด้วยพารามิเตอร์ μ และ σ^2 เขียนแทนสัญลักษณ์ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ เมื่อ $Y = \exp(X)$ ซึ่งจะทำให้ Y มีการแจกแจงลอการิธึมด้วยพารามิเตอร์ μ และ σ^2 ซึ่งเป็นพารามิเตอร์บ่งบอกตำแหน่ง และพารามิเตอร์บ่งบอกสเกล (Scale parameter) ตามลำดับ การแจกแจงลอการิธึมมีลักษณะเบ้ขวา (Right-skewed) และจัดอยู่ในประเภทการแจกแจงหางหนา ซึ่งทำให้การแจกแจงนี้เหมาะสมกับการนำมาใช้อธิบายข้อมูลในประเภทการเงิน การลงทุน รวมถึงธุรกิจประกันภัย

สมมติให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลอการิธึมด้วยพารามิเตอร์ μ และ σ^2 เขียนแทนด้วย $X \sim \text{LGN}(\mu, \sigma^2)$ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของ X แสดงดังนี้

$$f_X(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}; x > 0, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0 \quad (2.13)$$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของ $X \sim \text{LGN}(\mu, \sigma^2)$ กำหนดโดย

$$F_X(x; \mu, \sigma^2) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \quad (2.14)$$

โดย Φ แทนฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงปกติมาตรฐาน (Standard normal distribution)

ค่าคาดหวังของ $X \sim \text{LGN}(\mu, \sigma^2)$ คือ $E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$

ความแปรปรวนของ $X \sim \text{LGN}(\mu, \sigma^2)$ คือ $\text{Var}(X) = (e^{\sigma^2} - 1) e^{2\mu + \sigma^2}$

2.2 เทคนิคในการพัฒนาการแจกแจงความน่าจะเป็น (Techniques for developing probability distributions)

ในปัจจุบันข้อมูลที่น่ามาวิเคราะห์มักไม่สอดคล้องกับคุณสมบัติของการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิม (Traditional probability distributions) ทำให้การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิมไม่สามารถอธิบายลักษณะของข้อมูลประเภทนี้ได้ดี เพื่อแก้ไขปัญหาดังกล่าวได้มีการพัฒนาเทคนิคต่าง ๆ ขึ้นมากมายเพื่อปรับปรุงรูปแบบการแจกแจงความน่าจะเป็นให้มีความยืดหยุ่นและ

สามารถอธิบายลักษณะของข้อมูลจริงได้ดียิ่งขึ้น โดยแต่ละเทคนิคมีแนวทางในการปรับเปลี่ยนโครงสร้างของการแจกแจงความน่าจะเป็นแตกต่างกันออกไป ทั้งนี้ เทคนิคส่วนใหญ่มีจุดมุ่งหมายเพื่อขยายขอบเขตของการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิมให้ครอบคลุมลักษณะของข้อมูลที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาและพัฒนาฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นโดยใช้เทคนิคหลัก 3 แนวทาง ได้แก่ เทคนิค Transmuted Family เทคนิค Azzalini และเทคนิคการผสมการแจกแจงความน่าจะเป็น (Mixing distribution)

2.2.1 การพัฒนาการแจกแจงความน่าจะเป็นโดยใช้เทคนิคตระกูล Transmuted Distribution

2.2.1.1 Quadratic Transmuted Family of Distribution

เทคนิคตระกูล Transmuted Distribution เป็นหนึ่งในแนวคิดของการขยายรูปแบบการแจกแจงความน่าจะเป็นให้มีความยืดหยุ่นมากขึ้น โดยอยู่ในรูปทั่วไปสำหรับการแจกแจงความน่าจะเป็น (Generalized distributions) เพื่อให้สามารถอธิบายลักษณะของข้อมูลที่หลากหลายและซับซ้อนได้ดีกว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิม เทคนิคนี้ได้ถูกนำเสนอขึ้นครั้งแรกในปี ค.ศ. 2009 โดย ฌอน และ บัคลีย์ (Shaw & Buckley, 2009) ภายใต้ชื่อว่า “Quadratic Transmuted Family of Distribution” ซึ่งนิยามการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมรูปแบบใหม่ไว้ดังนี้

$$F(x) = (1 + \lambda)G(x) - \lambda G^2(x), \lambda \in [-1, 1] \quad (2.15)$$

โดยที่ $G(x)$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงแบบดั้งเดิมที่กำหนด λ คือพารามิเตอร์เป็นพารามิเตอร์ควบคุมรูปร่าง (Shape parameter) ที่เพิ่มมาเพื่อช่วยในการควบคุมลักษณะของการแจกแจงความน่าจะเป็น หรือกล่าวได้ว่าพารามิเตอร์ λ ทำให้สามารถปรับเปลี่ยนรูปร่างของการแจกแจงความน่าจะเป็นให้มีความยืดหยุ่นมากขึ้น ทั้งในด้านความเบ้ (Skewness) และความโด่งหรือความแหลมของปลายหาง (Kurtosis)

ในกรณีที่ $\lambda = 0$ การแจกแจงความน่าจะเป็นที่พัฒนาด้วยเทคนิคนี้จะลดรูปไปเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิม $G(x)$ แสดงให้เห็นว่าเทคนิค Transmuted Distribution เป็นการขยายการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิม โดยสามารถปรับลักษณะของการแจกแจงให้เบี่ยงเบนเหมาะสมกับข้อมูลได้

เทคนิคนี้ได้รับความนิยมและถูกนำไปต่อยอดในการสร้างการแจกแจงใหม่ ๆ อีกมากมาย เช่น Transmuted Weibull (Aryal & Tsokos, 2011), Transmuted Lindley (Merovci, 2013), Transmuted Pareto (Merovci & Puka, 2014) รูปแบบการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ถูกพัฒนา

ด้วยเทคนิคนี้ช่วยให้การแจกแจงสามารถปรับเปลี่ยนรูปร่างลักษณะได้หลากหลายยิ่งขึ้น เพื่อให้เหมาะสมกับข้อมูลเฉพาะทางในด้านต่าง ๆ โดยเฉพาะข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์ความเสี่ยง นอกจากนี้ ยังมีการต่อยอดและพัฒนาเทคนิคตระกูล Transmuted Distribution ในรูปแบบอื่น ๆ เพิ่มเติม ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

2.2.1.2 Cubic Transmuted Family of Distribution

ในปี ค.ศ. 2017 โดย กรันโซโต และคณะ (Granzotto et al., 2017) ได้มีการนำเสนอการขยายรูปแบบของตระกูล Transmuted Distribution มีชื่อเรียกว่า “Cubic Transmuted Family of Distribution” ซึ่งนิยามฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสม ไว้ดังนี้

$$F(x) = (1 + \lambda_1)G(x) + (\lambda_2 - \lambda_1)G^2(x) + (1 - \lambda)G^3(x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in [-1, 1] \quad (2.16)$$

โดย $G(x)$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงแบบดั้งเดิมที่กำหนด เมื่อกำหนดให้ $\lambda_1, \lambda_2 = 0$ การแจกแจงความน่าจะเป็นที่พัฒนาด้วยเทคนิคนี้จะลดรูปไปเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิม $G(x)$ ในปีเดียวกันโดย อัล-กาดีม และ โมฮัมเหม็ด (AL-Kadim & Mohammed, 2017) ได้นำเสนอรูปแบบอื่นของ Cubic Transmuted Family ซึ่งแสดงดังต่อไปนี้

$$F(x) = (1 + \lambda)G(x) - 2\lambda G^2(x) + \lambda G^3(x), \quad \lambda \in [-1, 1] \quad (2.17)$$

ในกรณีที่ $\lambda = 0$ การแจกแจงความน่าจะเป็นที่พัฒนาด้วยเทคนิคนี้จะลดรูปไปเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิม $G(x)$

รูปแบบของ Cubic Transmuted Family of Distribution ถูกพัฒนาขึ้นเพื่อช่วยให้การแจกแจงที่กำหนดมีความยืดหยุ่นที่สูงขึ้นในการอธิบายข้อมูล โดยเฉพาะการตรวจจับลักษณะข้อมูลที่ทางหนาได้ดียิ่งขึ้น จึงเหมาะสมอย่างยิ่งแก่การนำไปประยุกต์ใช้ในการสร้างตัวแบบความเสี่ยง ไม่ว่าจะเป็นบริบทของการเงิน และการประกันภัย

2.2.1.3 General Cubic Transmuted Family of Distribution

ในปี ค.ศ. 2018 โดย ราห์มาน และคณะ (Rahman et al., 2018a) ได้นำเสนอรูปแบบทั่วไป (General form) ของตระกูล Cubic Transmuted Family of Distribution ซึ่งเป็นการพัฒนามาจากรูปแบบที่นำเสนอโดย อัล-กาดีม และ โมฮัมเหม็ด โดยมีชื่อเรียกว่า “General Cubic Transmuted Family of Distribution” ซึ่งนิยามฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสม ไว้ดังนี้

$$F(x) = (1 + \lambda_1)G(x) - (\lambda_2 - \lambda_1)G^2(x) - \lambda_2 G^3(x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in [-1, 1] \quad (2.18)$$

โดย $G(x)$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงแบบดั้งเดิมที่กำหนด เมื่อกำหนดให้ $\lambda_1, \lambda_2 = 0$ การแจกแจงความน่าจะเป็นที่พัฒนาด้วยเทคนิคนี้จะลดรูปไปเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิม $G(x)$ หากกำหนดให้ $\lambda_2 = 0$ สมการนี้สามารถลดรูปไปเป็น Quadratic Transmuted Family of Distribution และหากกำหนดให้ $\lambda_2 = -\lambda_1$ สมการนี้ยังสามารถลดรูปไปเป็น Cubic Transmuted Family of Distribution ที่นำเสนอโดย อัล-กาติม และ โมฮัมเหม็ด

รูปแบบทั่วไปนี้จึงถือเป็นการสรุปรวมและขยายแนวคิดของการแจกแจงแบบ Transmuted ให้มีความยืดหยุ่นและครอบคลุมรูปแบบที่นำเสนอโดย อัล-กาติม และ โมฮัมเหม็ด มากยิ่งขึ้น

2.2.1.4 New General Cubic Transmuted Family of Distribution

ในปี ค.ศ. 2018 โดย ราห์มาน และคณะ (Rahman et al., 2018b) ได้นำเสนออีกหนึ่งรูปแบบใหม่ของ General Cubic Transmuted Family of Distribution เพื่อเพิ่มความยืดหยุ่นในการปรับรูปร่างของการแจกแจงความน่าจะเป็นให้อธิบายลักษณะของข้อมูลที่ซับซ้อนได้ดีมากยิ่งขึ้น โดยรูปแบบใหม่นี้มีชื่อเรียกว่า “New General Cubic Transmuted Family of Distribution” ซึ่งนิยามฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสม ไว้ดังนี้

$$F(x) = (1 + \lambda_1 + \lambda_2)G(x) - (\lambda_1 + 2\lambda_2)G^2(x) + \lambda_2 G^3(x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in [-1, 1] \quad (2.19)$$

โดย $G(x)$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงแบบดั้งเดิมที่กำหนด เมื่อกำหนดให้ $\lambda_1, \lambda_2 = 0$ การแจกแจงความน่าจะเป็นที่พัฒนาด้วยเทคนิคนี้จะลดรูปไปเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิม $G(x)$ หากกำหนดให้ $\lambda_2 = 0$ สมการนี้สามารถลดรูปไปเป็น Quadratic Transmuted Family of Distribution และถ้าหากกำหนดให้ $\lambda_1 = 0$ ยังสามารถลดรูปไปเป็น Cubic Transmuted Family of Distribution ที่นำเสนอโดย อัล-กาติม และ โมฮัมเหม็ด

2.2.1.5 New Cubic Transmuted Family of Distribution

จากการพัฒนาในปี ค.ศ. 2018 โดย ราห์มาน และคณะ ที่นำเสนอรูปแบบทั่วไปของตระกูลการแจกแจงแบบ Cubic Transmuted ในปีถัดมา (ค.ศ. 2019) โดยกลุ่มผู้วิจัยเดียวกันได้เสนอการแจกแจงรูปแบบใหม่ภายใต้ชื่อ "New Cubic Transmuted Family of Distribution" ซึ่งมีการปรับลดจำนวนพารามิเตอร์ลงเหลือเพียงตัวเดียว เพื่อลดความซับซ้อนในการนำไปใช้และการประมาณค่าพารามิเตอร์ ในขณะที่ยังคงไว้ซึ่งความยืดหยุ่นในการปรับรูปร่างของการแจกแจงความน่าจะเป็นในการนำไปใช้เพื่ออธิบายลักษณะของข้อมูลได้ดั้งเดิม (Rahman et al., 2019) โดยฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของรูปแบบใหม่นี้สามารถแสดงได้ดังนี้

$$F(x) = (1 - \lambda)G(x) + 3\lambda G^2(x) - 2\lambda G^3(x), \lambda \in [-1, 1] \quad (2.20)$$

โดย $G(x)$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงแบบดั้งเดิมที่กำหนด เมื่อกำหนดให้ $\lambda = 0$ การแจกแจงความน่าจะเป็นที่พัฒนาด้วยเทคนิคนี้จะลดรูปไปเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิม $G(x)$

2.2.1.6 An Adaptive Transmuted Family of Distribution

เทคนิคตระกูล Transmuted Distribution เป็นเทคนิคที่มีความยืดหยุ่นสูงในการพัฒนาการแจกแจงความน่าจะเป็นให้สามารถอธิบายข้อมูลที่มีลักษณะหลากหลายได้ในโลกแห่งความเป็นจริง จึงทำให้เทคนิคนี้ถูกนำไปใช้ในงานวิจัยจำนวนมาก อย่างไรก็ตาม ปัญหาที่พบคือ ค่าพารามิเตอร์ λ ที่ถูกเพิ่มเข้ามาในเทคนิคนี้อาจไม่ได้อยู่ในช่วงค่าที่เป็นไปได้ของพารามิเตอร์ (Parameter space) ตามที่กำหนดในการแจกแจงความน่าจะเป็น โดยเฉพาะในกรณีที่ $\lambda \notin [-1, 1]$ ซึ่งทำให้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมที่นิยามในเทคนิคตระกูล Transmuted Distribution อาจมีค่าเป็นลบหรือมีค่ามากกว่าหนึ่งในบางช่วงของค่าตัวแปรสุ่ม ผลที่ตามมาคือจากนิยามของฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมซึ่งต้องมีค่าอยู่ในช่วง $[0, 1]$ อาจถูกละเมิด นอกจากนี้ยังส่งผลต่อการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Function: MLE) เนื่องจากการที่ค่าพารามิเตอร์ไม่อยู่ในขอบเขตของพารามิเตอร์ (Parameter space) ที่กำหนดไว้สำหรับการแจกแจงความน่าจะเป็น อาจทำให้ไม่สามารถประมาณของพารามิเตอร์ได้ เพราะจะไม่เกิดการลู่เข้าของพารามิเตอร์ที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นมีค่าสูงสุด (Likelihood function) ซึ่งสิ่งที่กล่าวมานี้ล้วนส่งผลโดยตรงต่อความน่าเชื่อถือของการวิเคราะห์ และการนำผลลัพธ์ไปใช้งานในสาขาอื่น ๆ ด้วยเหตุนี้โดยในปี 2025 โดย เอี้ยวสานุรักษ์ และ เมามีศรี (leosanurak & Moumeesri, 2025a) ได้มีการนำเสนอ Transmuted Distribution รูปแบบใหม่ที่ขยายขอบเขตของค่าพารามิเตอร์จาก $[-1, 1]$ ให้สามารถเป็นไปได้ทุกค่าใด ๆ บนเซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ โดยรูปแบบใหม่นี้ถูกพัฒนาต่อยอดมาจากแนวคิดที่นำเสนอโดย ฌอน และ บัคเลีย ในปี 2009 กับ ราห์มาน และคณะ ในปี 2019 ซึ่งนิยามรูปแบบใหม่ไว้ 2 รูปแบบดังนี้

1) Adaptive Quadratic Transmuted Family of Distribution

ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมรูปแบบใหม่ของ Quadratic form สามารถแสดงได้ดังนี้

$$F(x) = (1 + e^{-p^2})G(x) - e^{-p^2}G^2(x), p \in \mathbb{R} \quad (2.21)$$

โดย $G(x)$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงแบบดั้งเดิมที่กำหนด

2) Adaptive Cubic Transmuted Family of Distribution

ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมรูปแบบใหม่ของ Cubic form สามารถแสดงได้ดังนี้

$$F(x) = (1 + e^{-p^2})G(x) + 3e^{-p^2}G^2(x) - 2e^{-p^2}G^3(x), \quad p \in \mathbb{R} \quad (2.22)$$

โดย $G(x)$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงแบบดั้งเดิมที่กำหนด

รูปแบบที่นำเสนอใหม่นี้ช่วยให้การแจกแจงความน่าจะเป็นสามารถครอบคลุมลักษณะของข้อมูลที่หลากหลายได้ดียิ่งขึ้น อีกทั้งยังเพิ่มความยืดหยุ่นในการนำไปประยุกต์ใช้งานในบริบทต่าง ๆ และเพิ่มความแกร่ง (Robustness) ในการวิเคราะห์ทางสถิติอย่างมีประสิทธิภาพ (leosanurak & Moumeesri, 2025a)

จากการศึกษางานวิจัยที่ผ่านมา สามารถกล่าวได้ว่าแนวคิดหลักของเทคนิค Transmuted Distribution นั้นมุ่งไปที่การให้น้ำหนักกับข้อมูลส่วนหาง (Tail behavior) มากยิ่งขึ้น ซึ่งเป็นประโยชน์อย่างยิ่งสำหรับการศึกษาข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับความเสี่ยง โดยเฉพาะในบริบทของการเงินการประกันภัยที่ลักษณะเฉพาะของข้อมูลประเภทนี้มักจะมีลักษณะการกระจายที่สูง (Overdispersion) และแสดงลักษณะการลู่เข้าสู่ศูนย์ช้า ซึ่งมักจะอธิบายได้ดีด้วยการแจกแจงความน่าจะเป็นประเภทหางหนา (Heavy-tailed distribution) ด้วยเทคนิค Transmuted Distribution ที่กล่าวมาช่วยเพิ่มศักยภาพของการแจกแจงความน่าจะเป็นในการอธิบายลักษณะของข้อมูลที่ไม่สมมาตร (Asymmetry) ได้มีประสิทธิภาพและครอบคลุมข้อมูลมากยิ่งขึ้น โดยเฉพาะข้อมูลในบริบทการประกันภัยที่มีลักษณะเฉพาะดังกล่าว

ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงให้ความสนใจในการนำเทคนิค Adaptive Cubic Transmuted Family of Distribution ที่ได้นำเสนอขึ้นโดย เอียวसानุรักษ์ และ แม่มิศรี (leosanurak & Moumeesri, 2025a) มาใช้ประโยชน์ในการศึกษาครั้งนี้ โดยมุ่งเน้นการประยุกต์ใช้การแจกแจงที่ได้จากเทคนิคนี้กับข้อมูลด้านการประกันภัย เพื่อเพิ่มความแม่นยำในการวิเคราะห์และประเมินความเสี่ยง

2.2.2 การพัฒนาการแจกแจงความน่าจะเป็นโดยใช้เทคนิค Azzalini

2.2.2.1 แนวคิดของเทคนิค Azzalini สำหรับการแจกแจงที่สมมาตร

เทคนิค Azzalini หรือที่รู้จักกันในชื่อ Azzalini's Skew Distribution หรือ Skew-Normal Distribution เป็นแนวคิดที่เสนอโดย อาเดลลี อัสซาลินี ในปี ค.ศ. 1985 เพื่อสร้างการแจกแจงความน่าจะเป็นที่สามารถอธิบายข้อมูลที่มีลักษณะไม่สมมาตร (Skewed) ได้อย่างเหมาะสม โดยทั่วไป การแจกแจงปกติ (Normal distribution) มีลักษณะสมมาตรรอบค่าเฉลี่ย ซึ่งเป็นข้อสมมติพื้นฐานของ

การวิเคราะห์ทางสถิติหลายประเภทรวมถึงการสร้างตัวสถิติทดสอบส่วนใหญ่ อย่างไรก็ตามในความเป็นจริงข้อมูลที่พบในโลกแห่งความเป็นจริงมักไม่ได้มีการกระจายแบบสมมาตร เช่น รายได้ประชากร คะแนนสอบ หรือมูลค่าค่าสินไหมทดแทน ด้วยเหตุนี้ อาเดลคี อัสซาลินี จึงได้พัฒนาเทคนิคที่สามารถ "บิด" หรือ ทำให้การแจกแจงเอียง (Skewed) ได้ โดยยังคงรักษาโครงสร้างพื้นฐานบางส่วนของ การแจกแจงปกติเอาไว้ เพื่อให้การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ได้สามารถสะท้อนถึงลักษณะของข้อมูลที่มีความไม่สมมาตรได้ดียิ่งขึ้น

รูปแบบเฉพาะของ Azzalini's Skew Distribution หรือ Skew-Normal Distribution สามารถนิยามได้ดังนี้

$$f(x; \lambda) = 2\phi(x)\Phi(\lambda x) \quad (2.23)$$

โดยที่ $\phi(x)$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติมาตรฐาน (Standard normal distribution)

$\Phi(x)$ คือ ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงปกติมาตรฐาน

λ คือ พารามิเตอร์ที่ควบคุมระดับความเบ้ (Skewness) ของการแจกแจง

ในกรณีที่มิได้ระบุการแจกแจงเฉพาะเจาะจง เทคนิคของ Azzalini ยังสามารถขยายให้อยู่ในรูปแบบทั่วไป เพื่อเพิ่มความยืดหยุ่นในการนำไปประยุกต์ใช้กับการแจกแจงความน่าจะเป็นใด ๆ ที่มีลักษณะสมมาตรได้เช่นกัน เช่น การนำไปใช้กับการแจกแจงโลจิสติก การแจกแจงลาปลาซ โดยรูปแบบทั่วไปสามารถเขียนได้ดังนี้

$$g(x) = 2f(x)F(\lambda x) \quad (2.24)$$

โดยที่ $f(x)$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงพื้นฐานที่มีลักษณะสมมาตร

$F(x)$ คือ ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงพื้นฐานเดียวกัน

λ คือ พารามิเตอร์ที่ควบคุมระดับความเบ้ (Skewness) ของการแจกแจง

2.2.2.2 การขยายแนวคิดไปสู่การแจกแจงที่ไม่สมมาตร

ในปี ค.ศ. 2009 โดย กุปตะ และ กุนดู (Gupta & Kundu, 2009) ได้นำแนวคิดของ Azzalini ไปต่อยอดและพัฒนาใช้กับการแจกแจงแบบไม่สมมาตร เช่น การแจกแจงตระกูลเลขชี้กำลัง (Exponential family) ที่พัฒนาไปเป็นการแจกแจงเลขชี้กำลังถ่วงน้ำหนัก (Weighted Exponential Distribution: WE) ซึ่งเป็นการแจกแจงใหม่ที่มีคุณสมบัติทางสถิติที่ดี และมีประสิทธิภาพในการอธิบายลักษณะของข้อมูลได้ดีกว่าการแจกแจงพื้นฐานที่รู้จักกัน เช่น การแจกแจงไวบูล การแจกแจงล็อกโลจิสติก โดยมีเทคนิคมากมายถูกพัฒนาขึ้นภายใต้แนวคิดนี้ ดังในงานวิจัยของ คอวาริชมี และ

คณะ (Kharazmi et al., 2015) ที่ได้นำการแจกแจงที่เสนอโดย คุปตะ และ กุนดู มาพัฒนาต่อเป็นรูปแบบทั่วไปในชื่อ Generalized Weighted Exponential Distribution นอกจากนี้ โอคุนทุนเด และคณะ (Oguntunde et al., 2018) ได้นำเสนอการแจกแจงใหม่ที่ได้รับการปรับปรุงภายใต้แนวคิดของ WE และ เชอโน และ คณะ (Chesneau et al., 2022) ได้นำเสนอการแจกแจงใหม่ในชื่อ On a Modified Weighted Exponential Distribution เป็นต้น แนวคิดนี้ได้กลายเป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับการพัฒนาเทคนิค Generalized Mixture และการสร้างการแจกแจงใหม่ ๆ เพื่อเพิ่มความยืดหยุ่นและความแม่นยำในการอธิบายข้อมูลที่มีลักษณะเบ้ (Skewness) หรือมีพฤติกรรมหางหนา (Heavy-tailed behavior)

การแจกแจงเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (New Two Weighted Exponential Distribution: NTWED)

ในปี ค.ศ. 2024 เชอโน และคณะ (Chesneau et al., 2024) ได้นำเสนอการแจกแจงใหม่ภายใต้แนวคิดของ Azzalini และ คุปตะ และ กุนดู มาใช้ในการสร้างการแจกแจงความน่าจะเป็นรูปแบบใหม่ โดยแนวคิดทั้งหมดอยู่ภายใต้กรอบของ Generalized Mixture ในการพัฒนาการแจกแจงดังกล่าว ซึ่งเทคนิค Generalized Mixture มีแนวคิดพื้นฐานที่คล้ายคลึงกับเทคนิคของ Azzalini กล่าวคือ เป็นการสร้างการแจกแจงใหม่ผ่านการถ่วงน้ำหนัก แต่แตกต่างจากเทคนิคของ Azzalini ซึ่งใช้ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงแบบสมมาตรเพียงอย่างเดียวในการถ่วงน้ำหนัก ในขณะที่เทคนิค Generalized Mixture จะใช้ค่าสัมประสิทธิ์ถ่วงน้ำหนักที่สามารถกำหนดให้มีความยืดหยุ่นยิ่งขึ้น อีกทั้งยังสามารถนำการแจกแจงพื้นฐานที่แตกต่างกันมากกว่าสองการแจกแจงมาผสมผสานกันเพื่อสร้างการแจกแจงใหม่ได้ และที่สำคัญคือไม่จำเป็นต้องจำกัดอยู่เฉพาะการแจกแจงที่มีลักษณะสมมาตรเท่านั้น ซึ่งเป็นการขยายแนวคิดให้มีความครอบคลุมและยืดหยุ่นมากยิ่งขึ้นในเชิงทฤษฎีและการประยุกต์ใช้งาน

การแจกแจงที่ เชอโน และคณะนำเสนอนี้ ถูกสร้างขึ้นภายใต้เป้าหมายเพื่อให้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลได้หลากหลายประเภท โดยเฉพาะข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับความเสียหาย ไม่ว่าจะเป็นการวิเคราะห์การรอดชีพ (Survival analysis) ซึ่งมักพบข้อมูลที่มีการตรวจตัด (Censored data) หรือการประยุกต์ใช้ในอุตสาหกรรมการประกันภัยซึ่งต้องรับมือกับข้อมูลที่มีความเสี่ยงสูง โดย เชอโน และคณะ ได้ทำทานิยามการแจกแจงใหม่ที่พัฒนาขึ้นภายใต้แนวคิดนี้ ดังต่อไปนี้

สมมติให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก ด้วยพารามิเตอร์ α และ β ตามลำดับ เขียนแทนด้วย $X \sim \text{NTWE}(\alpha, \beta)$ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของ X แสดงดังนี้

$$f_X(x; \alpha, \beta) = \frac{(\beta + 1)^2}{\beta^2} e^{-\alpha x} (1 - (1 + \alpha \beta x) e^{-\alpha \beta x}) ; x > 0, \alpha, \beta > 0 \quad (2.25)$$

ค่าคาดหวังของ $X \sim \text{NTWE}(\alpha, \beta)$ คือ $E(X) = \frac{\beta+3}{\alpha(\beta+1)}$

ความแปรปรวนของ $X \sim \text{NTWE}(\alpha, \beta)$ คือ $\text{Var}(X) = \frac{\beta^2 + 2\beta + 3}{\alpha^2(\beta+1)^2}$

2.2.3 การพัฒนาการแจกแจงความน่าจะเป็นโดยใช้เทคนิคการผสมการแจกแจง (Mixing Distribution)

การผสมการแจกแจงความน่าจะเป็นเป็นหนึ่งในเทคนิคที่ใช้ในการพัฒนาฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิม เช่น การแจกแจงปัวซอง การแจกแจงเลขชี้กำลัง และการแจกแจงแกมมา แนวคิดเกี่ยวกับการผสมการแจกแจงถูกคิดค้นขึ้นในช่วงต้นศตวรรษที่ 19 โดย กรีนวูด และ ยูล (Greenwood & Yule, 1920) ได้นำเสนอการแจกแจงปัวซองแบบผสม (Mixed poisson distribution) ขึ้นเพื่อเป็นทางเลือกในการแก้ไขปัญหาข้อมูลที่มีลักษณะไม่สอดคล้องกับคุณสมบัติของการแจกแจงปัวซอง เนื่องจากการแจกแจงปัวซองที่นำเสนอโดย ซีเมอง เดอนี ปัวซอง มีคุณสมบัติว่าค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนต้องมีค่าเท่ากัน (Mean equal variance) แต่ในความเป็นจริงข้อมูลมักมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนไม่เท่ากัน ทำให้ละเมิดต่อข้อคุณสมบัติของการแจกแจงปัวซอง ด้วยเหตุนี้การใช้การแจกแจงปัวซองเพียงอย่างเดียวเข้ามาอธิบายลักษณะของข้อมูลอาจไม่เหมาะสมหรือกล่าวได้ว่าการแจกแจงปัวซองมักไม่มีความยืดหยุ่นในการอธิบายข้อมูลจำนวนนับ ยกตัวอย่างในด้านอุตสาหกรรมการเงินและการประกันภัยที่ข้อมูลมักมีลักษณะการกระจายที่มาก (Over-dispersion) หรือความแปรปรวนมากกว่าค่าเฉลี่ย (Variance > mean) ดังนั้นการแจกแจงปัวซองแบบผสมจึงถูกนำไปประยุกต์ใช้ในการอธิบายข้อมูลหลากหลายสาขาภายใต้ข้อมูลที่มีลักษณะเป็นจำนวนนับที่มีคุณสมบัติค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนไม่เท่ากัน (Mean unequal variance) ด้วยเหตุนี้จึงมีการพัฒนาการแจกแจงปัวซองแบบผสมขึ้นมากมายในช่วงศตวรรษที่ผ่านมา ยกตัวอย่างเช่น การแจกแจงปัวซอง-ลินด์ลีย์ (Sankaran, 1970), การแจกแจงปัวซอง-ลินด์ลีย์ 2 พารามิเตอร์ (Shanker et al., 2012), การแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง (Cancho et al., 2011) เพื่อใช้ในการสร้างฟังก์ชันการแจกแจงข้อมูลประเภทการนับที่มีลักษณะ Over-dispersion ได้อย่างเหมาะสมยิ่งขึ้น

นอกจากการแจกแจงปัวซองแบบผสมที่นำไปใช้ในการอธิบายข้อมูลที่มีลักษณะเป็นจำนวนนับ ต่อมาได้มีการแจกแจงเลขชี้กำลังแบบผสมเกิดขึ้น ด้วยเทคนิค Mixture สำหรับข้อมูลที่มีลักษณะเป็นแบบต่อเนื่อง ดังในงานวิจัย The gamma distribution as a mixture of exponential distributions (Gleser, 1989), Exponential Pareto distribution (Al-Kadim & Boshi, 2013)

ในงานวิจัยทางด้านประกันภัยได้นำการแจกแจงแบบผสมไปสร้างตัวแบบทางประกันภัย เช่น การสร้างตัวแบบการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเพื่อคำนวณเบี้ยประกันภัยแบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย (Bonus-Malus Premium) โดยพิจารณาภายใต้จำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน (Walhin & Paris, 1999) หรือพิจารณาภายใต้จำนวนครั้งและความรุนแรงในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน (Frangos & Vrontos, 2001), (Ni et al., 2014) หรือแม้แต่ในการสร้างตัวแบบเพื่อประเมินความอยู่รอดของบริษัทประกันภัยจากการล้มละลาย (Sattayatham et al., 2013), (leosanurak & Moumeesri, 2025b)

ทฤษฎีบท 2.2 ให้ X มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f(x, \theta)$ ด้วยพารามิเตอร์ θ ถ้าพารามิเตอร์ θ แตกต่างกัน พารามิเตอร์ θ จะถือเป็นตัวแปรสุ่มด้วย เขียนแทนด้วย Θ ดังนั้นจะมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข $f_{X|\Theta}(x|\theta)$ และฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $\pi_{\Theta}(\theta)$ จากนั้นทำการหาปริพันธ์ฟังก์ชันการแจกแจงร่วม $f(x, \theta)$ ตลอดค่าที่เป็นไปได้ของพารามิเตอร์ θ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบไม่มีเงื่อนไขของ X แสดงดังนี้

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x; \theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|\Theta}(x|\theta) \pi_{\Theta}(\theta) d\theta \quad (2.26)$$

หมายเหตุ: ถ้า $\pi_{\Theta}(\theta)$ เป็นการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องปริพันธ์จะถูกแทนด้วยผลรวม ในงานวิจัยนี้ศึกษาฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $\pi_{\Theta}(\theta)$ ที่เป็นการแจกแจงประเภททางหนา ซึ่งการแจกแจงประเภทนี้มักสอดคล้องกับลักษณะข้อมูลประกันภัยโดยพื้นฐาน ทำให้มีประโยชน์ในการสร้างตัวแบบทางประกันภัย

2.3 การประมาณค่าพารามิเตอร์ (Parameters estimation)

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation : MLE)

การประมาณค่าด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นหนึ่งในวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์โดยขึ้นอยู่กับตัวอย่างสุ่ม $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ โดยมีแนวคิดพื้นฐานคือการเลือกค่าสำหรับพารามิเตอร์ที่ทำให้ความ

น่าจะเป็นของการสังเกตให้สูงที่สุด ในกรณีที่ตัวอย่างสุ่มมีขนาดเล็กวิธีนี้อาจไวต่อความคลาดเคลื่อน และอาจทำให้เสียคุณสมบัติบางประการของตัวประมาณได้ ดังนั้นการประมาณค่าด้วยวิธีภูวณะน่าจะเป็นสูงที่สุดจึงเหมาะสมยิ่งขึ้นเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ เนื่องจากจะทำให้ตัวประมาณที่ได้จากวิธีภูวณะน่าจะเป็นสูงที่สุดมีคุณสมบัติที่เหมาะสมได้แก่ ความไม่เอนเอียง (Unbiased) ความเพียงพอ (Sufficient) และความคงเส้นคงวา (Consistency) วิธีการประมาณค่าด้วยวิธีภูวณะน่าจะเป็นสูงที่สุด มีขั้นตอนการดำเนินการดังนี้

ให้เวกเตอร์ $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ มีคุณสมบัติความเป็นอิสระต่อกันและมีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเดียวกัน (Independent and Identically Distribution; i.i.d.) เพื่อหาค่าที่มากที่สุดของฟังก์ชันภูวณะน่าจะเป็น (Likelihood function) ที่จะเป็นไปได้ของพารามิเตอร์ $\theta_j (j = 1, 2, \dots, m)$ ฟังก์ชันภูวณะน่าจะเป็น แสดงได้ดังนี้

$$L(\theta_j; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta_j) \quad (2.27)$$

เมื่อ $f(x_i; \theta_j)$ คือ ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นหรือฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X หลังจากนั้นทำการใส่ลอการิทึมฐานธรรมชาติในฟังก์ชันภูวณะน่าจะเป็น แล้วจะได้

$$\ln L(\theta_j; x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \ln [f(x_i; \theta_j)] \quad (2.28)$$

ในขั้นต่อมาจะทำการหาอนุพันธ์เทียบกับพารามิเตอร์ θ_j แล้วจับเท่ากับ 0 และแก้สมการของอนุพันธ์เพื่อให้ได้ค่าสูงสุดของฟังก์ชันภูวณะน่าจะเป็น จะได้

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln L(\theta_j) = 0 \quad (2.29)$$

ซึ่งจะได้ตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ θ_j คือ $\hat{\theta}_j$ สำหรับฟังก์ชันภูวณะน่าจะเป็นสูงที่สุด

ในบางกรณีที่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้หรือไม่สามารถหาผลลัพธ์ของสมการได้ด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์โดยตรง โดยเฉพาะการแจกแจงมีพารามิเตอร์จำนวนมาก และฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูปเชิงเส้นได้ (Non-linear) จะทำการประมาณค่าภูวณะน่าจะเป็นสูงที่สุดโดยวิธีการเชิงตัวเลข (Numerical method) ซึ่งมีแนวคิดพื้นฐานในของการเพิ่มประสิทธิภาพความไม่เป็นเชิงเส้นในการหาพารามิเตอร์ที่เหมาะสมอย่างรวดเร็วเพื่อให้ได้ค่าความน่าจะเป็นของการสังเกตสูงที่สุด (Myung, 2003)

2.4 การทดสอบภาวะสารูปดี

การทดสอบภาวะสารูปดี (Goodness of fit test) เป็นการทดสอบสมมติฐานว่าข้อมูลของตัวอย่างถูกสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงตามที่คาดไว้หรือไม่ ในการศึกษาครั้งนี้ได้มีการนำการทดสอบภาวะสารูปดีมาใช้ในการทดสอบว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ได้นำเสนอมีความสอดคล้องกับข้อมูลจริงทางประกันภัยหรือไม่ โดยดำเนินการภายใต้การทดสอบภาวะสารูปดีทั้ง 3 วิธี ได้แก่ 1) การทดสอบภาวะสารูปดีโดยสถิติไคกำลังสอง (Chi-square Goodness of fit test) สำหรับใช้ในการทดสอบการแจกแจงสำหรับจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน 2) การทดสอบภาวะสารูปดีโดยสถิติโครโมโกรอฟ-สมิร์นอฟ (Kolmogorov-Smirnov test: KS test) 3) การทดสอบภาวะสารูปดีโดยสถิติแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิ่ง (Anderson-Darling test: AD test) โดยวิธีของ KS test และ AD test จะถูกนำมาใช้ในการทดสอบการแจกแจงสำหรับมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

2.4.1 การทดสอบภาวะสารูปดีโดยสถิติไคกำลังสอง

การทดสอบไคกำลังสองสามารถประยุกต์ใช้สำหรับการทดสอบการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มว่ามีลักษณะการแจกแจงตามที่คาดไว้หรือไม่ โดยอาศัยหลักการเปรียบเทียบความถี่ที่สังเกตได้จากข้อมูลตัวอย่างกับความถี่ที่คาดหมายภายใต้สมมติฐานว่าง เช่น กรณีต้องการทดสอบว่าข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่างมีการแจกแจงตามที่คาดไว้หรือไม่ จะเรียกการทดสอบดังกล่าวว่า การทดสอบภาวะสารูปดี (Goodness of fit test)

สมมติฐาน

H_0 : การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มมีลักษณะการแจกแจงเป็นไปตามที่คาดไว้

H_1 : การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มมีลักษณะการแจกแจงเป็นไม่ไปตามที่คาดไว้

โดยข้อมูลตัวอย่างถูกแบ่งออกเป็นกลุ่มที่ต่างกันจากนั้นเปรียบเทียบความถี่ของค่าสังเกตในกลุ่มที่ i กับความถี่ที่คาดหมายในกลุ่มที่ i แสดงดังนี้

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi_{k-m-1}^2 \quad \text{ภายใต้ } H_0 \text{ จริง} \quad (2.30)$$

เมื่อ χ^2 คือค่าสถิติของการทดสอบภาวะสารูปดีของไคกำลังสอง เมื่อองศาความเป็นอิสระ $df = k - m - 1$ เมื่อ m คือจำนวนพารามิเตอร์ที่ประมาณ

O_i คือ ความถี่ของค่าสังเกตในกลุ่มที่ i ; $i = 1, 2, \dots, k$

E_i คือ ความถี่ที่คาดหมายในกลุ่มที่ i ; $i = 1, 2, \dots, k$ และ $E_i = np_i$

k คือ จำนวนกลุ่มหรือระดับของตัวแปร

เกณฑ์การตัดสินใจ

ภายใต้สมมติฐานว่างจริง สถิติทดสอบไคกำลังสองจะมีการแจกแจงโดยประมาณแบบไคกำลังสองที่ระดับองศาอิสระ $k - m - 1$ ดังนั้นหากค่าสถิติทดสอบไคกำลังสองที่คำนวณได้ (χ^2_{cal}) มีค่ามากกว่าค่าวิกฤตของไคกำลังสอง χ^2 ที่ระดับองศาอิสระ $k - m - 1$ จะทำการปฏิเสธสมมติฐานว่างภายใต้ระดับนัยสำคัญ α

2.4.2 การทดสอบภาวะสารูปดีโดยสถิติโครโมโกรอฟ-สมิร์นอฟ

การทดสอบโครโมโกรอฟ-สมิร์นอฟเป็นการทดสอบภาวะสารูปดีโดยเปรียบเทียบระหว่างการแจกแจงสะสมเชิงประจักษ์ (Empirical Cumulative Distribution Function: ECDF) กับการแจกแจงสะสมเชิงทฤษฎี (Theoretical Cumulative Distribution Function) ของค่าความถี่สะสม โดยการทดสอบนี้จะพิจารณาระยะห่างที่มากที่สุดในแต่ละช่วงของตัวแปรที่ศึกษา จากการแจกแจงสะสมเชิงประจักษ์กับการแจกแจงของค่าความถี่สะสมเชิงทฤษฎี ถ้าระยะห่างที่มากที่สุด (D-statistic) มีค่ามากแสดงว่าการแจกแจงสะสมเชิงประจักษ์ไม่สอดคล้องกับการแจกแจงสะสมเชิงทฤษฎี หรือกล่าวได้ว่าข้อมูลไม่ได้มาจากประชากรที่มีการแจกแจงตามที่คาดไว้ในสมมติฐานว่าง ในทางกลับกันถ้าระยะห่างที่มากที่สุดมีค่าน้อยแสดงว่าการแจกแจงสะสมเชิงประจักษ์สอดคล้องกับการแจกแจงสะสมเชิงทฤษฎี หรือกล่าวได้ว่าข้อมูลมาจากประชากรที่มีการแจกแจงตามที่คาดไว้ในสมมติฐานว่างตามฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเชิงประจักษ์แสดงดังนี้

$$F^n(x) = \frac{1}{n} [\text{จำนวนค่าสังเกต} \leq x] \quad (2.31)$$

สมมติฐาน

H_0 : การแจกแจงสะสมเชิงประจักษ์เท่ากับการแจกแจงสะสมเชิงทฤษฎี

H_1 : การแจกแจงสะสมเชิงประจักษ์ไม่เท่ากับการแจกแจงสะสมเชิงทฤษฎี

ตัวสถิติโครโมโกรอฟ-สมิร์นอฟ แสดงดังนี้

ให้ D แทนค่าความแตกต่างที่มากที่สุดระหว่างระยะห่างของการแจกแจงสะสมเชิงประจักษ์กับการแจกแจงสะสมเชิงทฤษฎี

$$D = \text{Sup}|F^n(x) - F(x)| \quad (2.32)$$

เมื่อ $F^n(x)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเชิงประจักษ์

$F(x)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเชิงทฤษฎีของการแจกแจงต่อเนื่องที่คาดไว้

เกณฑ์การตัดสินใจ

จะปฏิเสธสมมติฐานว่างหากค่าสถิติทดสอบโครโมโกรอฟ-สมิรโนฟที่คำนวณได้จากข้อมูลจริงมีค่าน้อยกว่าค่าวิกฤต ซึ่งคำนวณจาก 95% เปอร์เซ็นไทล์ (95th percentiles) ของการแจกแจงค่าสถิติโครโมโกรอฟ-สมิรโนฟ ที่ได้จากการสุ่มด้วยวิธีการของบูตสแตรป์จากชุดข้อมูลจริง $B=5000$ ชุด $D_1, D_2, \dots, D_B$

2.4.3 การทดสอบภาวะสารูปติโดยสถิติแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิ่ง

เป็นการทดสอบทางสถิติประเภทหนึ่งที่ใช้ในการตรวจสอบความเหมาะสมของการแจกแจงข้อมูล โดยมีแนวคิดคล้ายกับการทดสอบโครโมโกรอฟ-สมิรโนฟ ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบระหว่างการแจกแจงสะสมเชิงประจักษ์กับการแจกแจงสะสมเชิงทฤษฎี ของค่าความถี่สะสม การทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิ่งจะให้ความสำคัญกับพื้นที่ใต้กราฟโดยจะมีการยกกำลังที่แตกต่างกันไปในแต่ละช่วงของข้อมูล หรือกล่าวได้ว่าจะมีการให้น้ำหนักที่แตกต่างกันไปในแต่ละช่วงข้อมูล สิ่งนี้ทำให้การทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิ่งสามารถตรวจจับความผิดปกติในหางของการแจกแจงได้ดีกว่าการทดสอบโครโมโกรอฟ-สมิรโนฟ เมื่อมีการให้ความสำคัญกับหางของการแจกแจง แต่อาจจะไม่เหมาะสมกับตัวอย่างที่มีขนาดเล็ก

สมมติฐาน

H_0 : การแจกแจงสะสมเชิงประจักษ์เท่ากับการแจกแจงสะสมเชิงทฤษฎี

H_1 : การแจกแจงสะสมเชิงประจักษ์ไม่เท่ากับการแจกแจงสะสมเชิงทฤษฎี

สมมติให้ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นข้อมูลตัวอย่างที่มีการเรียงลำดับจากน้อยไปมาก การคำนวณสถิติแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$AD = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i + 1) [\ln(F(x_i)) + \ln(1 - F(x_{n-i+1}))] \quad (2.33)$$

เมื่อ x_i คือ ค่าอันดับที่ i ของข้อมูลที่มีการเรียงลำดับจากน้อยไปมาก

n คือ ขนาดตัวอย่าง

$F(x_i)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเชิงทฤษฎีของการแจกแจงต่อเนื่องที่คาดไว้ ที่เกี่ยวข้องกับ x_i

เกณฑ์การตัดสินใจ

จะปฏิเสธสมมติฐานว่างหากค่าสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิ่งที่คำนวณได้จากข้อมูลจริงมีค่าน้อยกว่าค่าวิกฤต ซึ่งคำนวณจาก 95% เปอร์เซ็นไทล์ (95th percentiles) ของการแจกแจง

ค่าสถิติแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิ่ง ที่ได้จากการสุ่มด้วยวิธีการของบูตสแตรป์จากชุดข้อมูลจริง $B=5000$ ชุด $AD_1, AD_2, \dots, AD_B$

2.4.4 เกณฑ์สารสนเทศของอะกะอิเกะ (Akaike Information Criteria: AIC)

ในปี 1974 โดย อะกะอิเกะ (Akaike, 1974) ได้ทำการพัฒนาเกณฑ์สารสนเทศของอะกะอิเกะขึ้นโดยมีแนวคิดว่าการปรับโมเดลให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น เช่น การเพิ่มจำนวนพารามิเตอร์ในตัวแบบ อาจส่งผลให้ค่าความน่าจะเป็นจากการสังเกต (Log-likelihood) สูงขึ้น และทำให้ตัวแบบอธิบายข้อมูลได้ดีเกินจริง (Overfitting) เกณฑ์ AIC จึงถูกสร้างขึ้นเพื่อลดปัญหานี้ โดยการเพิ่มโทษสำหรับจำนวนพารามิเตอร์เข้าไป เกณฑ์สารสนเทศของอะกะอิเกะเป็นวิธีการทางสถิติที่ใช้เป็นเกณฑ์ในการคัดเลือกตัวแบบที่เหมาะสม โดยใช้ในการเปรียบเทียบตัวแบบที่จะนำมาใช้ในการศึกษาหรือวิเคราะห์ข้อมูล โดยค่า AIC ที่ต่ำกว่าแสดงถึงความเหมาะสมของการแจกแจงที่ใช้ในการอธิบายข้อมูล สมการต่อไปนี้จะใช้ในการคำนวณค่า AIC แสดงดังนี้

$$AIC = -2\ln(L) + 2m, \quad (2.34)$$

โดยที่ L เป็นค่าของฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจง และ m แทนจำนวนพารามิเตอร์ที่ประมาณ

2.4.5 เกณฑ์สารสนเทศของเบส์ (Bayesian Information Criterion: BIC)

ในปี 1978 ชวาร์ตซ์ (Schwarz, 1978) ได้ทำการปรับปรุงเกณฑ์สารสนเทศของอะกะอิเกะ ในปี 1974 โดยมีแนวคิดเดียวกับเกณฑ์ AIC แต่เน้นไปที่การแก้ปัญหาเกี่ยวกับขนาดของตัวอย่างที่มากขึ้นเนื่องมาจากการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีความน่าจะเป็นสูงสุดจำเป็นต้องใช้ขนาดตัวอย่างใหญ่เพื่อให้ตัวประมาณที่ได้มีคุณสมบัติเหมาะสม ชวาร์ตซ์จึงได้พัฒนาเกณฑ์สารสนเทศแบบเบส์ โดยพิจารณาขนาดตัวอย่างร่วมด้วย ซึ่ง BIC เป็นหนึ่งในวิธีการทางสถิติในการคัดเลือกตัวแบบที่เหมาะสมในการวิเคราะห์ข้อมูล ค่า BIC ที่ต่ำแสดงถึงการเลือกตัวแบบที่มีความเหมาะสมกับข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ สมการในการคำนวณ BIC แสดงดังต่อไปนี้

$$BIC = -2\ln(L) + m\ln(n), \quad (2.35)$$

โดยที่ L เป็นค่าของฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแบบ m แทนจำนวนพารามิเตอร์ที่ประมาณ และ n คือขนาดของข้อมูลตัวอย่าง

2.5 นิยามและทฤษฎีของเบย์เซียน

การคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัย (Bonus-Malus System : BMS) โดยวิธีการของเบย์เซียน (Bayesian method) เป็นหนึ่งในวิธีที่ได้รับความนิยมในการประยุกต์ใช้เพื่อการคำนวณเบี้ยประกันภัยภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัย หลักการนี้ได้ถูกพิสูจน์แล้วว่าเป็นเครื่องมือที่ดีในการแก้ปัญหาเกี่ยวข้องกับทฤษฎีความน่าเชื่อถือและการกำหนดเบี้ยประกันภัย เมื่อทราบข้อมูลสำหรับผู้ถือกรมธรรม์แต่ละราย (Gómez-Déniz et al., 2014) สมมติว่าการแจกแจงของลักษณะความเสี่ยงภัยของผู้ถือกรมธรรม์แทนด้วย $\pi(\theta)$ โดยที่พารามิเตอร์ θ เป็นพารามิเตอร์ที่เราไม่ทราบค่าซึ่งเกิดจากการแจกแจงแบบมีเงื่อนไข $f_{X|\theta}(x|\theta)$

บทนิยาม 2.11 การแจกแจงก่อน (Prior distribution) เป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นบนค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของพารามิเตอร์ เขียนแทนด้วย $\pi(\theta)$ แสดงถึงโอกาสที่ค่าต่าง ๆ จะเป็นค่าพารามิเตอร์จริงของการแจกแจงนั้นหรือให้เข้าใจโดยง่าย การแจกแจงก่อนคือการคาดการณ์ค่าที่เป็นไปได้ของพารามิเตอร์ก่อนการสังเกต

บทนิยาม 2.12 การแจกแจงของตัวแบบ คือการแจกแจงความน่าจะเป็นสำหรับข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้ตามลักษณะของค่าพารามิเตอร์เฉพาะตัว ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเขียนแทนด้วย $f_{X|\theta}(x|\theta)$ ถ้าเวกเตอร์ของค่าสังเกต $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ซึ่งประกอบด้วยตัวแปรสุ่มที่มีความเป็นอิสระกันและมีการแจกแจงเดียวกัน

$$f_{X|\theta}(x|\theta) = f_{X|\theta}(x_1|\theta)f_{X|\theta}(x_2|\theta) \cdots f_{X|\theta}(x_n|\theta) \quad (2.36)$$

บทนิยาม 2.13 การแจกแจงร่วม (Joint distribution) ของตัวแปรสุ่ม X ด้วยพารามิเตอร์ θ มี PDF ดังนี้

$$f_{X;\theta}(x; \theta) = f_{X|\theta}(x|\theta)\pi(\theta) \quad (2.37)$$

บทนิยาม 2.14 การแจกแจงตามขอบ (Marginal distribution) เป็นการรวมการแจกแจงสำหรับตัวแปรสุ่ม X เมื่อสมมติว่าพารามิเตอร์มีการแจกแจงก่อน (Prior distribution) จะได้ฟังก์ชันการแจกแจงตามขอบ คือ

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|\theta}(x|\theta)\pi(\theta)d\theta \quad (2.38)$$

ถ้าพารามิเตอร์มีจำนวนมากกว่าหนึ่งพารามิเตอร์ สมการที่กล่าวข้างต้นจะทำการหาปริพันธ์หลายชั้น

บทนิยาม 2.15 การแจกแจงภายหลัง (Posterior distribution) เป็นการประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่มโดยใช้พารามิเตอร์ของข้อมูลของค่าสังเกต ในทางเทคนิคแล้วการแจกแจงภายหลังคือการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของพารามิเตอร์ θ ตามข้อมูลของค่าสังเกต x นั่นคือ $\pi_{\theta|x}(\theta|x)$

ทฤษฎีบท 2.3 การแจกแจงภายหลังสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\pi_{\theta|x}(\theta|x) = \frac{f_{x|\theta}(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{x|\theta}(x|\theta)\pi(\theta)d\theta} \quad (2.39)$$

2.6 ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัย (BMS)

บริษัทประกันภัยสร้างระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัยเพื่อให้รางวัลแก่ผู้ที่มีประวัติการขับขี่ที่ดีโดยการลดเบี้ย และให้บทลงโทษแก่ผู้ที่มีประวัติการขับขี่ที่ไม่ดีโดยการเพิ่มเบี้ย การคิดเบี้ยแบบเดิมเบี้ยประกันภัยที่ผู้ขับขี่ต้องจ่ายจะพิจารณาจากจำนวนอุบัติเหตุหรือจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้ถือกรมธรรม์ โดยไม่ได้คำนึงถึงมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย ผู้เอาประกันจะถูกเรียกเก็บเบี้ยประกันภัยที่สูงขึ้น (Malus) หากมีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน และจะถูกเรียกเบี้ยประกันที่ถูกลง (Bonus) หากไม่มีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ในส่วนนี้จะอธิบายเกี่ยวกับการดำเนินการภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัย และพิจารณาระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัยจากส่วนประกอบมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

ที่กล่าวมาข้างต้นเป็นการพิจารณาการคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยจากองค์ประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้องเท่านั้น แต่ในการศึกษาต่อไปนี้จะพิจารณาจากทั้ง 2 องค์ประกอบหลักคือ จำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนร่วมกัน

2.6.1 การคำนวณเบี้ยประกันภัยภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัยที่ขึ้นอยู่กับองค์ประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

เทร็มเบลย์ (Tremblay, 1992) ออกแบบระบบ BMS ที่เหมาะสมโดยการผสมการแจกแจงปัวซองกับการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน (Inverse Gaussian distribution) สำหรับการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ในงานวิจัยนี้มีการอ้างถึงจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนด้วยการแจกแจงปัวซอง ซึ่งการอ้างถึงแตกต่างกันไปตามข้อมูลส่วน

บุคคล มีการสันนิษฐานว่าความเสี่ยงอันเนื่องมาจากจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนจะมีการแจกแจงปัวซองที่มีค่าเฉลี่ย θ โดยที่ θ เป็นตัวแปรสุ่มที่แสดงถึงความเสี่ยงภัยค่าความหมายของผู้เอาประกันแต่ละบุคคลในพอร์ตประกันภัยที่กำหนด โดยผู้เขียนงานวิจัยนี้เชื่อว่า θ มีการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน ที่มีลักษณะเป็นการแจกแจงหางหนา (Heavy-tailed distribution) งานวิจัยนี้ใช้ทฤษฎีของเบย์เซียนในการประมาณการแจกแจงภายหลังสำหรับความเสี่ยงโดยธรรมชาติของข้อมูลส่วนบุคคลของผู้เอาประกันภัยแต่ละคนตามจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนในอดีตเป็นเวลา t ปี เบี้ยประกันถูกคำนวณโดยใช้หลักการ Zero-Utility Principle

เลอแมร์ (Lemaire, 1995) สร้างฟังก์ชันการแจกแจงในการคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัยที่เหมาะสมตามจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนโดยผู้เอาประกันภัยแต่ละคน สำหรับการแจกแจงในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนด้วยการแจกแจงทวินามเชิงลบ (Negative Binomial distribution) ผู้เขียนงานวิจัยนี้ได้พิจารณาการผสมการแจกแจงปัวซองเข้ากับการแจกแจงแกมมา (Gamma distribution) และคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัยโดยใช้หลักการคำนวณเบี้ยประกันจากค่าความหมาย (Expected premium principle)

วอลฮิน และ ปารีส (Walhin & Paris, 1999) ได้พัฒนางานของ เทร็มเบลย์ ในปี 1992 และเลอแมร์ ในปี 1995 ผู้เขียนงานวิจัยได้ใช้การแจกแจงปัวซองอินเวอร์สเกาส์เซียน (Poisson-Inverse Gaussian) และการแจกแจงปัวซองแกมมาหรือทวินามเชิงลบ (Poisson-Gamma distribution) สำหรับการแจกแจงในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ผู้เขียนใช้การแจกแจง Hofmann ซึ่งการแจกแจงนี้มีสามพารามิเตอร์ และแสดงให้เห็นว่าการแจกแจง Hofmann สามารถอธิบายข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนได้ดี

เดนิซ (Gómez-Déniz, 2016) เสนอแบบจำลองทางสถิติในการคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัย โดยการแบ่งการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนออกเป็นสองประเภทที่แตกต่างกัน คือ ต่ำกว่าและสูงกว่ามูลค่าที่กำหนด สมมติให้จำนวนครั้งในการเรียกร้องมีการแจกแจงปัวซอง และจำนวนครั้งทั้งหมดที่มีมูลค่าในการเรียกร้องต่ำกว่าและสูงกว่ามูลค่าที่กำหนดให้มีการแจกแจงทวินาม (Binomial distribution) โดยใช้การแจกแจงแกมมา และการแจกแจงเบต้า (Beta distribution) สำหรับการแจกแจงก่อน ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัยเปรียบเทียบกับ การแจกแจงปัวซอง-แกมมา โดยจะพิจารณาเฉพาะจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเพียงอย่างเดียวซึ่งไม่แยกประเภทของการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

เฮร์นาเวตี และคณะ (Hernawati et al., 2017) ได้เสนอแบบจำลองสำหรับการคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัย โดยแบ่งประเภทการเรียกร้องเป็นสองประเภท คือ ต่ำกว่าและสูงกว่ามูลค่าที่กำหนด สมมติให้จำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนมีการแจกแจงปัวซอง และจำนวนครั้งในการเรียกร้องทั้งหมดที่มีต่ำกว่าและสูงกว่ามูลค่าที่กำหนดมีการแจกแจงทวินาม โดยที่ใช้การแจกแจงแบบเลขชี้กำลังและการแจกแจงเบต้า สำหรับการแจกแจงก่อน การคำนวณเบี้ยประกันภัยคำนวณภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัย โดยใช้วิธีของเบย์เซียน เป็นผลให้จำนวนเบี้ยประกันไม่ได้รับผลกระทบจากมูลค่าที่กำหนด

เดนิซ และ โอเมดา (Gómez-Déniz & Calderín-Ojeda, 2018) ได้เสนอตัวแบบอย่างง่ายสำหรับการจ่ายเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัยที่แยกประเภทของการเรียกร้องออกเป็นสามประเภทที่แตกต่างกัน โดยขึ้นอยู่กับมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ประเภทแรกจะมีมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนต่ำกว่าที่กำหนดตัวแรก ประเภทที่สองมีมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนอยู่ระหว่างที่กำหนดตัวแรกและตัวที่สอง และประเภทสุดท้ายจะมีมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนสูงกว่าที่กำหนดตัวที่สอง

2.6.2 การคำนวณเบี้ยประกันภัยภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัยที่ขึ้นอยู่กับองค์ประกอบจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

ตัวแบบที่ได้กล่าวข้างต้นจะได้รับผลกระทบจากจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเท่านั้น โดยที่ไม่ได้คำนึงถึงมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน เมื่อผู้ถือกรมธรรม์มีมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนที่ต่ำ บุคคลนั้นจะมีการจ่ายเบี้ยประกันที่ไม่แตกต่างกับกับผู้ถือกรมธรรม์ที่มีมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนที่สูง ซึ่งไม่ว่าผู้ถือกรมธรรม์มีมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนที่ต่ำหรือมีมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนที่สูง ผู้ถือกรมธรรม์ทั้งหมดจะต้องจ่ายเบี้ยประกันในลักษณะเดียวกันซึ่งดูเหมือนจะไม่ยุติธรรมต่อผู้ถือกรมธรรม์ที่มีมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนที่ต่ำกว่า

ฟรังโกส และ วรอนโตส (Frangos & Vrontos, 2001) ทำการออกแบบเบี้ยประกันภัยภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัยที่เหมาะสม โดยพิจารณาจากจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนโดยใช้การแจกแจงปัวซอง-แกมมาสำหรับองค์ประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนและการแจกแจงเลขชี้กำลัง-อินเวอร์สแกมมา (Exponential-Inverse Gamma) สำหรับองค์ประกอบมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหม

ทดแทน จำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนถูกมองว่าเป็นไปตามการแจกแจงปัวซองด้วยค่าเฉลี่ย λ โดยที่ λ คือความเสี่ยงภัยของผู้ถือกรมธรรม์ในแต่ละบุคคลซึ่งมีค่าที่แตกต่างกันโดยธรรมชาติ มีความเชื่อว่าความเสี่ยงภัยของผู้ถือกรมธรรม์ในแต่ละรายมีการแจกแจงแกมมา สำหรับองค์ประกอบมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน มูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนถูกกำหนดว่ามีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังด้วยมูลค่าการเรียกร้องเฉลี่ย θ ซึ่ง θ แตกต่างกันไปตามผู้ถือกรมธรรม์ในแต่ละบุคคลซึ่งถือว่าเป็นตัวแปรสุ่ม มีความเชื่อว่ามูลค่าการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเฉลี่ย θ มีการแจกแจงอินเวอร์สแกมมา การใช้ทฤษฎีของเบย์เซียน ทำให้ได้มาซึ่งการแจกแจงภายหลัง (Posterior distribution) ขององค์ประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนและองค์ประกอบมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนสำหรับระยะเวลา t ปีของผู้ถือกรมธรรม์ การประมาณเบี้ยประกันภัยอยู่ภายใต้หลักการคำนวณเบี้ยประกันภัยสุทธิ (Net premium principle, แลนด์สมัน และ มาคอฟ (Landsman & Makov, 1998)) ซึ่งเป็นผลคูณค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังขององค์ประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน และฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังขององค์ประกอบมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัยที่คำนวณโดยใช้องค์ประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนนี้มีความเหมาะสมที่จะช่วยในการแยกความแตกต่างของเบี้ยประกันภัยตามมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ทำให้ยุติธรรมมากขึ้นสำหรับผู้ถือกรมธรรม์ที่มีมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนที่แตกต่างกัน

เมอร์ท และ ซายกัน (Mert & Saykan, 2005) ได้พิจารณาทั้งจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน เพื่อใช้ในการออกแบบเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัยที่เหมาะสม โดยสมมติให้จำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนมีการแจกแจงเรขาคณิต (Geometric) และมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนมีการแจกแจงพาเรโต (Pareto) ในส่วนของการนำไปใช้ เบี้ยประกันภัยถูกคำนวณภายใต้หลักการคำนวณเบี้ยประกันสุทธิ ผลลัพธ์ที่ได้จากจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเพียงอย่างเดียวหรือพิจารณาทั้งจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนสรุปได้ว่าการเรียกเก็บเบี้ยประกันภัยของผู้ถือกรมธรรม์ที่คำนึงถึงจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนทำให้เกิดความเท่าเทียมระหว่างผู้ถือกรมธรรม์มากกว่าพิจารณาจากจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเพียงองค์ประกอบเดียว

อิบิโวเย และคณะ (Ibiwoye et al., 2011) พิจารณาเบี่ยงแปรกันภายใต้ระบบลดเบี่ยง-เพิ่มเบี่ยง ที่เหมาะสมโดยคำนึงถึงจำนวนครั้งในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนและมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนเป็นองค์ประกอบ โดยรวมการแจกแจงปัวซองกับการแจกแจงเลขชี้กำลัง (Poisson-Exponential) และการแจกแจงปัวซองกับการแจกแจงแกมมา ในการอธิบายองค์ประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทน จำนวนครั้งในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนสมมติให้มีการแจกแจงปัวซอง ในขณะที่ความเสี่ยงภัยโดยธรรมชาติของผู้ถือกรมธรรม์ในแต่ละบุคคล เชื่อว่ามีการแจกแจงเลขชี้กำลังและการแจกแจงแกมมา เรียกว่า การแจกแจงก่อน (prior distribution) ในส่วนขององค์ประกอบมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทน ให้มูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนมีการแจกแจงพาราโต โดยที่มูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนสมมติให้มีการแจกแจงเลขชี้กำลังและเชื่อว่ามูลค่าเฉลี่ยในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนมีการแจกแจงอินเวอร์สแกมมา เบี่ยงแปรกันความเสี่ยงภัยถูกคำนวณโดยใช้จำนวนครั้งเฉลี่ยในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนและมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนเป็นสององค์ประกอบหลัก แบบจำลองนี้ยังช่วยในการลดความประมาทของผู้ขับขี่เพื่อปรับปรุงคุณภาพในการขับขี่ให้ดียิ่งขึ้น

นี และคณะ (Ni et al., 2014) เสนอแบบจำลองการคำนวณเบี่ยงแปรกันภายใต้ระบบลดเบี่ยง-เพิ่มเบี่ยงแปรกันภัย สมมติให้จำนวนครั้งในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนมีการแจกแจงทวินามเชิงลบและมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนมีการแจกแจงไวบูลล์ซึ่งมาจากการผสมการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังกับการแจกแจงเลวี (Levy distribution) ในบทความนี้ได้ใช้วิธีการของเบย์เซียนในการคำนวณเบี่ยงแปรกันภายใต้ระบบลดเบี่ยง-เพิ่มเบี่ยงแปรกันภัยและได้ทำการเปรียบเทียบแบบจำลองมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนด้วยการแจกแจงไวบูลล์และมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนด้วยการแจกแจงพาราโต พบว่าจะมีบทลงโทษที่สูงสำหรับผู้ที่มีมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนที่สูงและมีบทลงโทษที่ต่ำสำหรับผู้ที่มีมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนที่ต่ำทำให้เกิดความระมัดระวังในการขับขี่มากยิ่งขึ้น

อีมัด และ อาลี (Emad & Ali, 2016) เสนอแบบจำลองสำหรับการคำนวณเบี่ยงแปรกันภัยภายใต้ระบบลดเบี่ยง-เพิ่มเบี่ยงแปรกันภัย แบบจำลองนี้คำนึงถึงจำนวนครั้งในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนและมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนเป็นองค์ประกอบหลัก ในส่วนของจำนวนครั้งในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนมีการแจกแจงทวินามเชิงลบและในส่วนองค์ประกอบของมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนมีการผสมการแจกแจงแกมมาเข้ากับการแจกแจงแกมมา มีการใช้วิธีเบย์

เขียนในการคำนวณเบี้ยประกันภัยผลลัพธ์ที่ได้ทำให้เกิดการจ่ายเบี้ยประกันที่ยุติธรรม แบบจำลองที่ได้นำเสนอมีความมั่นคงและเป็นธรรมในการจ่ายเบี้ยประกันภัยรถยนต์สำหรับผู้ถือกรมธรรม์ทั้งหมดภายใต้มูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนที่ต่างกันและจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนที่เกิดขึ้นภายในระยะเวลาที่กำหนด

เจค็อบ และ อู (Jacob & Wu, 2020) พิจารณาแบบจำลองเบี้ยประกันภัยภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย โดยสมมติให้จำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนมีการแจกแจงทวินามเชิงลบและพาเรโตตามลำดับ ในบทความนี้มีการใช้หลักการเบี้ยประกันสุทธิในการสร้างเบี้ยประกันภัยภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัยที่เหมาะสมโดยคำนึงถึงประวัติการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้ถือกรมธรรม์ ด้วยเหตุผลนี้เมื่อเริ่มต้นแบบจำลอง เบี้ยประกันภัยพื้นฐานจะถือว่าเป็น 100 เปอร์เซ็นต์ จากนั้นหลังจากผ่านไปหนึ่งปีโดยไม่มีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเบี้ยประกันภัยจะถูกเรียกเก็บลดลงและจะถูกเรียกเก็บเพิ่มขึ้นสำหรับระยะเวลาการประกันครั้งต่อไปเมื่อมีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ระบบนี้เมื่อนำไปใช้จะก่อให้เกิดความยุติธรรมต่อผู้ถือกรมธรรม์และจะช่วยให้ผู้ขับขี่มีความระมัดระวังในการขับขี่มากขึ้น

เม้ามูศรี และ พงษ์ศาสตร์ (Moumeesri & Pongsart, 2022) ได้นำเสนอตัวแบบการแจกแจงในการคำนวณเบี้ยประกันภัยแบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยภายใต้องค์ประกอบหลักสองส่วน ได้แก่ จำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน และมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน โดยแบ่งการเรียกร้องออกเป็นสองประเภท คือการเรียกร้องที่ต่ำกว่าและการเรียกร้องที่สูงกว่ามูลค่าที่กำหนด สมมติว่าจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนมีการแจกแจงปัวซอง และจำนวนครั้งในการเรียกร้องทั้งหมดที่ต่ำกว่าและสูงกว่ามูลค่าที่กำหนดมีการแจกแจงทวินาม โดยใช้การแจกแจงลินด์ลีย์ (Lindley distribution) และการแจกแจงเบต้า (Beta distribution) เป็นการแจกแจงก่อน สำหรับตัวแบบจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน สำหรับตัวแบบมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน จะกำหนดให้มูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนมีการแจกแจงแกมมา โดยใช้การแจกแจงลินด์ลีย์ สำหรับการแจกแจงก่อน นอกจากนี้ยังใช้วิธีการของเบย์เซียนในการคำนวณเบี้ยประกันภัยเพื่อให้ได้เบี้ยประกันที่สอดคล้องกับประวัติการขับขี่และเป็นธรรมต่อผู้ถือกรมธรรม์

เอียวสานุรักษ์ และคณะ (leosanurak et al., 2023) ได้นำเสนอแบบจำลองการคำนวณเบี้ยประกันภัยภายใต้ระบบลดเบี้ยเพิ่มเบี้ย โดยพิจารณาจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนภายใต้การแจกแจงปัวซองแกมมาลินด์ลีย์ (Poisson GaL distribution) ซึ่งเกิดจากการผสมการแจก

แจกจ่ายเข้ากับการแจกแจงแกมมาลินด์ลีย์ (GaL distribution) และมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนภายใต้การแจกแจงเลขชี้กำลังแกมมาลินด์ลีย์ (Exponential GaL distribution) เกิดจากการผสมการแจกแจงเลขชี้กำลังเข้ากับการแจกแจงแกมมาลินด์ลีย์ (GaL distribution) อีกทั้งยังได้ใช้วิธีของเบย์เซียนในการคำนวณเบี้ยประกันภัยสำหรับการประกันภัยรถยนต์ เนื่องจากวิธีการของเบย์เซียนจะคำนวณเบี้ยประกันได้สอดคล้องกับประวัติการขับขี่ของแต่ละบุคคลซึ่งทำให้เกิดความเป็นธรรมต่อผู้ถือกรมธรรม์ในแต่ละบุคคล

จากงานวิจัยที่ได้ศึกษามาในส่วนขององค์ประกอบของจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ถูกสร้างขึ้นภายใต้การแจกแจงปัวซองแบบผสม โดยจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปัวซอง และความเสี่ยงในแต่ละบุคคล (พารามิเตอร์ของการแจกแจงปัวซอง) จะเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงความเสี่ยง (Risk distribution or Prior distribution) ในส่วนขององค์ประกอบมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ถูกสร้างขึ้นภายใต้การแจกแจงเลขชี้กำลัง โดยมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเลขชี้กำลัง และค่าเฉลี่ยของมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงก่อน เช่น การแจกแจงแกมมา การแจกแจงอินเวอร์สแกมมา การแจกแจงเบต้า การแจกแจงพาราโด การแจกแจงเลวี และการแจกแจงลินด์ลีย์ ในส่วนของการนำไปคำนวณเบี้ยภายใต้ระบบลดเบี้ยเพิ่มเบี้ยภายใต้จำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ได้มีการใช้วิธีของเบย์เซียนเพื่อให้เบี้ยประกันที่ได้มีความสอดคล้องกับประวัติการขับขี่ของแต่ละบุคคลมากที่สุด ซึ่งจะทำให้เกิดความเป็นธรรมต่อผู้ถือกรมธรรม์ในแต่ละบุคคล

2.6.3 หลักการคำนวณเบี้ยประกันภัย

ในการศึกษาครั้งนี้ผู้วิจัยจะพิจารณาเฉพาะเบี้ยประกันภัยสุทธิ (Net premium) ซึ่งคือหลักการพื้นฐานที่ว่าเบี้ยประกันภัยควรเป็นมูลค่าที่คาดหมายของการสูญเสีย เบี้ยประกันภัยสุทธิตำหนดโดยมูลค่าเฉลี่ยในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนและจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน รูปแบบของหลักการเบี้ยประกันภัยสุทธิแสดงได้ดังนี้

$$\text{Premium} = E[X] \quad (2.40)$$

เมื่อ X แทนฟังก์ชันการแจกแจงหลังที่คำนวณมาจากวิธีเบย์เซียนของจำนวนครั้งหรือมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

เบี้ยประกันภัยภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย ที่ถูกเรียกเก็บเบี้ยประกันภัยจะเท่ากับผลลัพธ์ของวิธีของ เบี้ยเขียนตามองค์ประกอบจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ดังนี้

$$\text{Premium} = BMS_F \times BMS_S \quad (2.41)$$

โดยที่ BMS_F และ BMS_S เป็นการคำนวณเบี้ยประกันภัยภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัย ที่พิจารณาองค์ประกอบจำนวนครั้งมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนโดยคำนวณมาจากค่าคาดหวังของฟังก์ชันการแจกแจงหลังที่จากวิธีเบย์เซียน $E[X]$ โดยพิจารณาแยกกันตามลำดับ

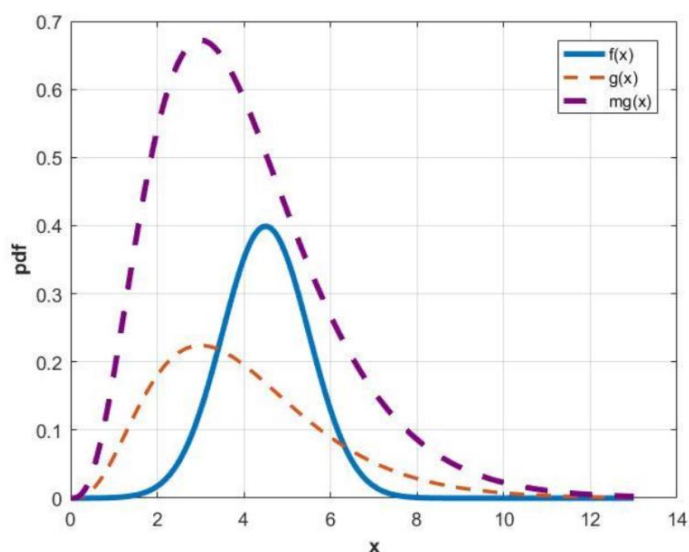
2.7 การสร้างแบบจำลองข้อมูล

วิธีการ Acceptance-rejection เป็นหนึ่งในวิธีการสุ่มตัวอย่างที่ได้รับความนิยมอย่างมาก โดยเฉพาะในกรณีที่ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมมีความซับซ้อนหรือไม่สามารถหาได้ ทำให้การแจกแจงเป้าหมายไม่สามารถหาฟังก์ชันผกผันของการแจกแจงสะสมได้ $F^{-1}(x)$ หรือหาฟังก์ชันนี้ได้ยาก ส่งผลให้ไม่สามารถใช้วิธี Inverse CDF ในการสุ่มตัวอย่างได้ ทางเลือกหนึ่งคือการใช้วิธี Acceptance-rejection โดยจะเป็นการสุ่มตัวอย่างค่าจากตัวแปรสุ่ม x_i จากฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น $f(x)$ โดยที่จำเป็นต้องทราบการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X

ในการใช้วิธีนี้จำเป็นต้องกำหนดฟังก์ชันการแจกแจงเสริม (Auxiliary distribution) ขึ้นมาแทนด้วย $g(x)$ โดยที่การสุ่มค่าจากตัวแปรสุ่ม X สามารถทำได้ง่าย (ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นนี้ไม่ควรซับซ้อนและควรแสดงลักษณะของการแจกแจงความน่าจะเป็นผ่านกราฟได้ชัดเจน) ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นที่นิยมใช้ ได้แก่ ฟังก์ชันการแจกแจงปกติหรือฟังก์ชันการแจกแจงเอกรูป (Uniform distribution) และจำเป็นต้องมีการกำหนดค่าคงที่ที่เรียกว่า “envelope constant,” c โดยที่ $0 < c < \infty$ ต่อมาจะทำการสร้างฟังก์ชันที่เกิดจากการคูณค่า envelope constant กับฟังก์ชันการแจกแจงเสริม มีชื่อเรียกว่า “blanket function,” $cg(x)$ โดยฟังก์ชันนี้จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไข ดังนี้

$$cg(x) \geq f(x) \text{ สำหรับทุกค่าของ } x$$

หรือกล่าวได้ว่า blanket function จำเป็นที่จะต้องคลุมการแจกแจงเป้าหมาย ซึ่งแสดงดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 แสดงฟังก์ชันการแจกแจงเป้าหมายเป็นการแจกแจงปกติ (เส้นทึบสีน้ำเงิน), ฟังก์ชันการแจกแจงเสริม (เส้นประสีส้ม) เป็นการแจกแจงแกมมา และ blanket function (เส้นประสีม่วง) เมื่อกำหนด $c=m=3$

ขั้นตอนในการสุ่มค่าตัวอย่างจากวิธี Acceptance-rejection

- 1) กำหนดการฟังก์ชันการแจกแจงเป้าหมาย $f(x)$
- 2) กำหนดการฟังก์ชันการแจกแจงเสริม $g(x)$ ที่ง่ายต่อการสุ่มจากตัวแปรสุ่ม X และเลือกค่า c ที่ทำให้ฟังก์ชัน $cg(x)$ ครอบคลุมการแจกแจงเป้าหมาย
- 3) สุ่มค่า u_i จากการแจกแจง $U(0,1)$
- 4) พิจารณา
$$\begin{cases} u_i \leq \frac{f(x_i)}{cg(x)}, & \text{ยอมรับ } x_i \\ u_i > \frac{f(x_i)}{cg(x)}, & \text{ปฏิเสธ } x_i \end{cases}$$
- 5) ทำขั้นตอนที่ 3 และ 4 วนไป จนกระทั่งสุ่มตัวอย่างค่าจากตัวแปรสุ่ม x_i ครบจำนวนที่กำหนด

2.8 ตัวแบบความเสี่ยงภัย

ตัวแบบความเสี่ยงภัย (risk models) คือ เครื่องมือที่ใช้ในการวิเคราะห์และบริหารจัดการกับความเสี่ยงที่จะเกิดขึ้น ไม่ว่าจะเป็นในบริบทของการเงิน การลงทุน การประกันภัย หรือในธุรกิจต่าง ๆ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อช่วยในการประเมินผลกระทบในเชิงลบอันเนื่องมาจากปัจจัยเสี่ยงต่าง ๆ ทั้งที่สามารถควบคุมได้และควบคุมไม่ได้ ด้วยเหตุนี้ จึงได้มีการคิดค้นและพัฒนาแบบตัวแบบขึ้นเพื่อช่วยใน

การวางแผนและตัดสินใจอย่างมีประสิทธิภาพเพื่อช่วยในการรับมือกับความเสี่ยงที่อาจเกิดขึ้นในอนาคต

2.8.1 ตัวแบบความเสียหายแบบดั้งเดิม (Classical Risk Model)

Filip Lundberg นักคณิตศาสตร์ประกันภัยชาวสวีเดน ได้วางรากฐานเกี่ยวกับทฤษฎีความเสี่ยงในปี ค.ศ. 1903 โดยการสร้างตัวแบบอย่างง่ายสำหรับการประกันวินาศภัย (Non-life insurance) ซึ่งเน้นไปที่ความสูญเสียอันเนื่องมาจากจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนที่ส่งผลกระทบต่อบริษัทประกันภัย เนื่องจากบริษัทประกันภัยจำเป็นต้องปกป้องผู้ถือกรมธรรม์จากการสูญเสียและความเสี่ยงที่ไม่สามารถประเมินได้ ความมั่นคงของบริษัทประกันภัยถูกประเมินภายใต้เงินทุนสำรองของบริษัท รวมไปถึงมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน และเบี้ยประกันภัยที่บริษัทได้รับจากผู้ถือกรมธรรม์ ตัวแบบความเสียหายประกอบด้วยข้อสมมติดังนี้

1) กำหนดให้ T_i เมื่อ $i = 1, 2, \dots$ แทนเวลาการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนที่เกิดขึ้นในลำดับเวลาที่ i โดยที่ $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ โดยลำดับของเวลาที่จะเกิดการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน (Claim arrive times) เรียกว่ากระบวนการมาถึงของการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน (Claim arrival time process) เขียนแทนด้วย $\{T_n, n \in \mathbb{N}_0\}$

2) การเรียกร้องที่ i^{th} มาถึงในเวลา T_i ทำให้เกิดมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน Y_i โดยลำดับของมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน เป็นตัวแปรสุ่มที่อิสระกันและมีการแจกแจงเดียวกัน (Identically independent distribution; i.i.d.) เรียก $Y_n, n \in \mathbb{N}$ หรือ $\{Y_i\}_{i \geq 0}$ ว่ากระบวนการของมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน (Claim severity process)

3) กระบวนการของมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน $Y_n, n \in \mathbb{N}$ และกระบวนการมาถึงของการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน $\{T_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ เป็นอิสระต่อกัน

นอกจากนี้ยังได้มีการกำหนดกระบวนการของจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน (Claim frequency process) ดังนี้

$$N(t) = \max \{i \geq 1: T_i \leq t\}$$

โดย $\{N(t), t \geq 0\}$ แทนจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนที่เกิดขึ้นภายในระยะเวลา t ในมุมมองบริษัทประกันภัยจะให้ความสนใจไปที่กระบวนการของมูลค่าทั้งหมดในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน (Total claim severity process ; $S(t)$) ในช่วงเวลา $[0, \infty]$ แสดงดังนี้

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, t \geq 0. \quad (2.42)$$

ต่อมาในปี ค.ศ. 1930 มีนักสถิติชื่อ ฮาร์ลด์ เครเมอร์ (Cramér, 1999) ได้เสนอแนวคิดใหม่ในทฤษฎีความเสี่ยง โดยการรวมกระบวนการของมูลค่าทั้งหมดในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน $S(t)$ กับกระบวนการมาถึงของการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน T_n ซึ่งถูกสร้างขึ้นโดยกระบวนการปัวซอง ในคณิตศาสตร์ประกันภัยกระบวนการปัวซองเอกพันธ์ (Homogeneous poisson process) นั้นสำคัญอย่างมาก เนื่องจากเมื่อจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเป็นกระบวนการปัวซองเอกพันธ์ ผลลัพธ์ที่ได้จากการรวมกันของกระบวนการของมูลค่าทั้งหมดกับกระบวนการมาถึงของการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนนี้ จะมีชื่อเรียกว่า ตัวแบบ Cramer-Lundberg

ให้ $p(t)$ แทนเบี้ยประกันภัยที่บริษัทได้รับจากผู้ถือกรมธรรม์ในช่วงเวลา $[0, t]$ ในตัวแบบของ Cramer-Lundberg กำหนดให้ $p(t)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ซึ่งเขียนได้ว่า $p(t) = ct, t \geq 0$ และ $c > 0$ เป็นค่าคงที่ที่แสดงถึงอัตราการเรียกเก็บเบี้ยประกันภัย (Premium rate) ซึ่งเป็นเงินที่ผู้เอาประกันภัยจะต้องจ่ายให้กับบริษัทประกันภัยโดยอาจจะคิดในลักษณะเป็น รายวัน รายเดือน รายปี หรืออื่น ๆ ตามที่ระบุไว้ในกรมธรรม์ โดยจะมีความแตกต่างกันในแต่ละบริษัทประกันภัย และ $S(t)$ แทนมูลค่าทั้งหมดของการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน เมื่อ $t \geq 0$ จะได้ว่า

$$U(t) = u + p(t) - S(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \quad (2.43)$$

กระบวนการ $\{U(t), t \geq 0\}$ เรียกว่าว่ากระบวนการความเสี่ยงหรือกระบวนการส่วนเกิน (Risk process or Surplus process) เมื่อ u เป็นเงินทุนเริ่มต้น (Initial capital)

2.8.2 กระบวนการความเสี่ยงสำหรับเวลาไม่ต่อเนื่อง (Discrete-time risk process)

ในกระบวนการความเสี่ยงแบบดั้งเดิม มูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน Y_n เกิดขึ้น ณ เวลา T_n เมื่อ $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ กระบวนการความเสี่ยงสำหรับเวลาไม่ต่อเนื่อง $\{U_n: n = 0, 1, 2, \dots\}$ ถูกกำหนดโดย

$$U_n = u + cT_n - \sum_{i=1}^n Y_i, n \in \mathbb{N}, \quad (2.44)$$

เมื่อ $U_0 = u \geq 0$ เป็นเงินทุนเริ่มต้นและ $c > 0$ เป็นอัตราการเรียกเก็บเบี้ยประกันภัยในหนึ่งหน่วยเวลา โดยคำนวณจากค่าคาดหวังของมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน (Expected value of severity) แสดงดังสมการ

$$c = (1 + \vartheta)E(Y) \quad (2.45)$$

โดยที่ $\vartheta > 0$ คือค่าเผื่อความปลอดภัย (Safety loading) ของบริษัทประกันภัย และ $E(Y)$ แทนค่าคาดหวังของมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

ในปี ค.ศ. 2006 ชาน และ จาง ได้ศึกษากระบวนการความเสี่ยงสำหรับเวลาไม่ต่อเนื่อง เพื่อศึกษาการเปลี่ยนแปลงของเงินทุนสำรองในบริษัทภายใต้ระยะเวลาที่กำหนด โดยอาศัยข้อสมมติว่า $T_n = n$ ซึ่งกระบวนการความเสี่ยงสำหรับเวลาไม่ต่อเนื่องนั้นคือกระบวนการที่ใช้ในการคำนวณค่าเงินทุนสำรอง ณ วันใด ๆ โดยพิจารณาภายใต้เงื่อนไขของเวลาไม่ต่อเนื่อง กระบวนการนี้ประกอบด้วยเงินทุนสำรองเริ่มต้น อัตราเบี้ยประกัน มูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน และช่วงเวลา แสดงดังนี้

$$U_n = u + cn - \sum_{i=1}^n Y_i, n \in \mathbb{N} \quad (2.46)$$

เมื่อ $U_0 = u > 0$ เป็นเงินทุนเริ่มต้น และ $c > 0$ เป็นเบี้ยประกันภัยในหนึ่งหน่วยเวลาซึ่งคำนวณจากสมการที่ (2.45) และจากสมการที่ (2.46) ยังสามารถนำมาเขียนในรูปสมการเวียนเกิดได้ดังนี้

จาก

$$U_n = u + cn - \sum_{i=1}^n Y_i$$

จะได้

$$\begin{aligned} U_n &= u + cn - c + c - \sum_{i=1}^n Y_i \\ &= u + c(n-1) + c - \sum_{i=1}^n Y_i \\ &= u + c(n-1) + c - \left(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i + Y_n \right) \end{aligned}$$

$$= \left(u + c(n-1) - \sum_{i=1}^{n-1} Y_i \right) + c - Y_n$$

ดังนั้น

$$U_n = U_{n-1} + c - Y_n \quad (2.47)$$

2.9 การคำนวณค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายภายใต้ระยะเวลาจำกัด (Finite-time ruin probability)

วัตถุประสงค์หลักของการสร้างตัวแบบความเสี่ยงภัยขึ้นคือการศึกษาคาดการณ์ความอยู่รอดของบริษัทประกันภัยเมื่อเวลาผ่านไป $\{U_n: n = 0, 1, 2, \dots\}$ โดยเราสามารถประเมินความเสี่ยงได้จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นของการล้มละลายภายใต้ระยะเวลาที่กำหนด ซึ่งได้จากสมการที่ (2.47) จึงสามารถคำนวณค่าความน่าจะเป็นที่จะรอดจากการล้มละลาย (Survival probability) ณ วันที่ n ได้ดังนี้

$$\varphi_n(U) = \Pr(U_1(u) \geq 0, U_2(u) \geq 0, U_3(u) \geq 0, \dots, U_n(u) \geq 0 \mid U = u_0) \quad (2.48)$$

หมายความว่ากรณีที่บริษัทประกันภัยจะไม่เกิดการล้มละลายเกิดขึ้นในช่วงเวลา n จะเกิดขึ้นเมื่อเงินทุนสำรองของบริษัท ณ วันที่ n ใด ๆ ต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 สำหรับทุก ๆ ช่วงเวลาดังแต่ 1 ถึง n จากสมการที่ 2.48 สามารถนิยามความน่าจะเป็นที่จะเกิดการล้มละลาย (Ruin probability) ภายในช่วงเวลา n ได้ดังนี้

$$\phi_n(U) = 1 - \varphi_n(U) \quad (2.49)$$

ในงานวิจัยนี้ได้ทำการจำลองข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน เพื่อใช้ในการจำลองสถานการณ์ของการกำหนดเงินทุนเริ่มต้นส่งผลต่อความน่าจะเป็นที่บริษัทประกันภัยจะรอดจากการล้มละลาย โดยกำหนดให้ S แทนจำนวนรอบทั้งหมดในการจำลองข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนในช่วงเวลา n วันที่กำหนด และ E แทนจำนวนรอบทั้งหมดที่ข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนที่จำลองเกิดการล้มละลาย ดังนั้นความน่าจะเป็นที่บริษัทจะล้มละลาย ณ เวลา t สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\phi(t) = E/S \quad (2.50)$$

โดยที่เมื่อกำหนดให้ S มีค่ามาก จะส่งผลให้จำนวนสถานการณ์จำลองมีความหลากหลายและครอบคลุมมากยิ่งขึ้น ซึ่งจะช่วยเพิ่มความแม่นยำของการประมาณค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลาย และส่งเสริมความน่าเชื่อถือในการวิเคราะห์ความเสี่ยงสำหรับบริษัทประกันภัย

2.10 ฟังก์ชันเชิงประจักษ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการล้มละลายกับเงินทุนเริ่มต้น

ในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรหรือการทำนายค่าของตัวแปรที่ศึกษา ทางสถิติสามารถศึกษาได้จากฟังก์ชันเชิงเส้นตรง (Linear function) ได้ หากทราบว่าตัวแปรอิสระ (Independent variables) และตัวแปรตาม (Response variable) มีความสัมพันธ์ในลักษณะเชิงเส้นตรง อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่ตัวแปรที่ศึกษาไม่ได้มีความสัมพันธ์กันเชิงเส้น การใช้ฟังก์ชันเชิงเส้นตรงอาจไม่เหมาะสม และทำให้ผลของการวิเคราะห์ขาดความน่าเชื่อถือ วิธีการแก้ปัญหามาดังกล่าวได้ด้วยการแปลงข้อมูลให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันเชิงเส้นตรง หรือใช้ฟังก์ชันที่ไม่เป็นเชิงเส้นตรงเข้ามาอธิบายข้อมูลแทน เช่น ฟังก์ชันการถดถอยแบบพหุนาม (Multinomial function) หรือฟังก์ชันการถดถอยเลขชี้กำลัง (Exponential function)

ในงานวิจัยนี้ได้นำฟังก์ชันเลขชี้กำลังมาใช้ในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเงินทุนเริ่มต้น (u) กับความน่าจะเป็นในการล้มละลายของบริษัทประกันภัย (ϕ) และเพื่อลดความซับซ้อนของการประมาณค่าพารามิเตอร์ จึงได้ทำการแปลงข้อมูลเพื่อให้มีลักษณะเป็นเชิงเส้นตรงเพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร ϕ และ u แสดงดังสมการเลขชี้กำลังด้านล่าง

$$\phi = \gamma e^{\delta u} \quad (2.51)$$

ทำการใส่ลอการิทึมฐานธรรมชาติทั้งสองข้างของสมการลงในสมการที่ (2.51) จะได้

$$\begin{aligned} \ln \phi &= \ln \gamma + \ln e^{\delta u} \\ &= \ln \gamma + \delta u \end{aligned} \quad (2.52)$$

กำหนดให้ $z = \ln \phi$, $a_0 = \ln \gamma$ และ $a_1 = \delta$ จะได้

$$z = a_0 + a_1 u. \quad (2.53)$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (2.53) ในรูปของการถดถอยเชิงเส้นตรง (Linear regression) โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดในการประมาณค่าพารามิเตอร์ จะได้

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i z_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n z_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (2.54)$$

$$a_0 = \bar{z} - a_1 \bar{x} \quad (2.55)$$

เมื่อทราบค่า a_0 และ a_1 จะแทนค่ากลับไปในสมการตัวแบบ $\phi = \gamma e^{\delta u}$ และ $\delta = a_1$ และ $\gamma = e^{a_0}$ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\delta = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i z_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n z_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (2.56)$$

และ

$$\gamma = e^{\bar{z} - a_1 \bar{x}} \quad (2.57)$$

2.11 การกำหนดเงินลงทุนเริ่มต้นขั้นต่ำ (Determining of Minimum Capital Reserve: MCR)

ในปี ค.ศ. 2013 โดย สัตยธรรม และคณะ (Sattayatham et al., 2013) ได้อธิบายการกำหนดเงินลงทุนเริ่มต้นขั้นต่ำที่เหมาะสมสำหรับบริษัทประกันภัยภายใต้ตัวแบบความเสี่ยงภัย โดยกำหนดให้ $\{U_n, n \geq 0\}$ แทนกระบวนการส่วนเกินที่คำนวณภายใต้กระบวนการมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน $\{X_n, n \geq 1\}$ และ $c > 0$ คืออัตราเบี้ยประกันภัยโดยกำหนดให้ $\alpha \in (0,1)$ แทนระดับความน่าจะเป็นของการขาดสภาพคล่องในธุรกิจประกันภัยที่บริษัทประกันภัยยอมรับได้ถ้า

$$\phi_n(U) \leq \alpha \quad (2.58)$$

โดย u คือเงินลงทุนเริ่มต้น

$$u^* = \min \{u: \phi_n \leq \alpha\} \quad (2.59)$$

โดย u^* สามารถคำนวณได้โดยฟังก์ชันของความน่าจะเป็นในการล้มละลาย $\phi = \gamma e^{\delta u}$ จะได้ว่าเงินลงทุนเริ่มต้นที่ต่ำสุดสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$u \geq \frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right) \quad (2.60)$$

ในงานนี้ผู้วิจัยศึกษาภายใต้กรณีที่ $\gamma \geq \alpha$ ซึ่งจะทำให้เงินเงินทุนเริ่มต้นมีค่ามากกว่าศูนย์เสมอ ดังนั้นจึงคำนวณเงินทุนเริ่มต้นต่ำสุด (Minimum Capital Reserve: MCR) ดังนี้

$$\text{MCR} = \frac{\ln \alpha - \ln \gamma}{\delta} \quad (2.61)$$



บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

3.1 ข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย

ในการศึกษานี้ได้ใช้ข้อมูลทั้งหมดจำนวน 5 ชุด ซึ่งเกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์ความเสี่ยงด้านประกันภัย โดยแสดงรายละเอียดในแต่ละชุดข้อมูลได้ดังนี้

3.1.1 ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

ข้อมูลชุดที่ 1:

ข้อมูลชุดนี้เป็นข้อมูลประกันภัยรถยนต์จากบริษัทประกันวินาศภัยแห่งหนึ่งในประเทศออสเตรเลีย ซึ่งครอบคลุมระยะเวลา 1 ปี ตั้งแต่ปี 2004 ถึง 2005 โดยสามารถเข้าถึงชุดข้อมูลนี้ได้จากเว็บไซต์ของคณะกรรมการธุรกิจและเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัย Macquarie เมืองซิดนีย์ ประเทศออสเตรเลีย (De Jong & Heller, 2008) ข้อมูลดังกล่าวประกอบด้วยรายละเอียดเกี่ยวกับจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน และมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนจากการขับรถยนต์รวมทั้งสิ้นจำนวน 67,856 กรมธรรม์ โดยมีผู้เรียกร้องค่าสินไหมทดแทนทั้งสิ้น 4,624 ราย

ในงานวิจัยนี้ได้ทำการสุ่มข้อมูลตัวอย่างจากชุดข้อมูลดังกล่าวด้วยวิธีการสุ่มแบบง่ายแบบคืนที่จำนวน 17,143 ราย โดยมีผู้เรียกร้องค่าสินไหมทดแทนทั้งสิ้น 1,200 ราย ซึ่งสามารถสรุปลักษณะของข้อมูลได้ตามตารางที่ 1

ข้อมูลชุดที่ 2:

ข้อมูลชุดนี้เป็นข้อมูลประกันภัยรถยนต์ในประเทศเบลเยียมปี 1993 เป็นชุดข้อมูลที่ใช้ในการวิเคราะห์จำนวนการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนในกรมธรรม์ประกันภัย ข้อมูลนี้ประกอบด้วยจำนวนการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนที่เกิดขึ้นในช่วงปี 1993 และถูกนำมาใช้ในการพัฒนาการแจกแจงความน่าจะเป็นใหม่ที่มีลักษณะคล้ายปัวซอง (Poisson-type distribution) ข้อมูลดังกล่าวประกอบด้วยผู้ถือกรมธรรม์ 63,299 ราย (Denuit, 1997) ซึ่งสามารถสรุปลักษณะของข้อมูลได้ตามตารางที่ 1

ข้อมูลชุดที่ 3:

ชุดข้อมูลที่ใช้ในการศึกษานี้ประกอบด้วยจำนวนครั้งของการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนสำหรับพอร์ตโพลิโอรถยนต์ของบริษัทประกันภัยแห่งหนึ่งในประเทศตุรกี ซึ่งเกิดขึ้นในช่วงระหว่างปี

2012 ถึง 2014 ข้อมูลดังกล่าวประกอบด้วยข้อมูลจากผู้ถือกรรมธรรม์ 10,814 ราย (Sarul & Sahin, 2015) ซึ่งสามารถสรุปลักษณะของข้อมูลได้ตามตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงสถิติพรรณนา (Descriptive statistics) ของข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนทั้ง 3 ชุดข้อมูล

จำนวนครั้งในการ เรียกร้องค่าสินไหม ทดแทน	ข้อมูลชุดที่ 1	ข้อมูลชุดที่ 2	ข้อมูลชุดที่ 3
0	15943	57178	8544
1	1126	5167	1796
2	68	446	370
3	5	50	81
4	1	8	23
เปอร์เซ็นต์ของ 0 ซ้ำ	93.00	90.33	79.01
ดัชนีวัดการกระจาย (DI)	1.06	1.08	1.11
ความเบ้ (Skewness)	4.05	3.52	3.61
ความโด่ง (Kurtosis)	21.80	14.59	18.74

3.1.2 ข้อมูลที่เกี่ยวกับมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

ข้อมูลชุดที่ 4:

ข้อมูลชุดนี้มาจากกรรมธรรม์ประกันภัยรถยนต์ของบริษัทประกันวินาศภัยแห่งหนึ่งในประเทศออสเตรเลีย ซึ่งครอบคลุมระยะเวลา 1 ปี ตั้งแต่ปี 2004 ถึง 2005 ข้อมูลดังกล่าวประกอบด้วยรายละเอียดเกี่ยวกับจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน (แสดงดังข้อมูลชุดที่ 1) มูลค่าของการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนจากการขับขี่ยานยนต์ โดยเป็นข้อมูลของผู้เอาประกันภัยจำนวนทั้งสิ้น 1,200 รายที่มีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

ข้อมูลชุดที่ 5:

ข้อมูลชุดนี้มาจากกรรมธรรม์ประกันภัยรถยนต์ของบริษัทประกันภัยแห่งหนึ่งในประเทศไทย โดยเป็นข้อมูลรายวันของมูลค่าของการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ซึ่งเก็บรวบรวมข้อมูลครอบคลุมระยะเวลา 1,296 วัน ข้อมูลดังกล่าวครอบคลุมเฉพาะแผนประกันภัยแบบสมัครใจสำหรับรถยนต์ประเภทต่าง ๆ

โดยพบว่ามูลค่าเฉลี่ยของการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนอยู่ที่ 17,662 บาท และมี ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เท่ากับ 41,331.63 บาท มูลค่าของการเรียกร้อยค่ามีตั้งแต่ขั้นต่ำ 159 บาท ไปจนถึงสูงสุด 899,879 บาท (Sattayatham et al., 2013)

3.2 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย

ในงานวิจัยนี้ ขั้นตอนการดำเนินงานสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 ส่วนหลัก ได้แก่ ส่วนแรกเป็นการสร้างฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นเพื่อใช้สำหรับอธิบายข้อมูลจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทน ส่วนที่สองเป็นการนำฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นที่นำเสนอจากส่วนแรกมาใช้ในการสร้างตัวแบบสำหรับการคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย (Bonus-Malus system) โดยพิจารณาทั้งจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนร่วมกัน และส่วนสุดท้ายเป็นการนำฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสำหรับข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนที่ได้นำเสนอ มาใช้ในการสร้างตัวแบบความเสี่ยงภัยสำหรับการประมาณค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายและการกำหนดเงินทุนเริ่มต้นขั้นต่ำของบริษัทประกันภัย

3.2.1 การสร้างฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นเพื่อใช้สำหรับอธิบายข้อมูลจำนวนครั้งและข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทน

ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสำหรับข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทน

1) ทำการผสมการแจกแจงปัวซองเข้ากับการแจกแจงเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (NTWE) ได้มาซึ่งการแจกแจงใหม่ที่มีชื่อว่า การแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (Poisson New Two Weighted Exponential Distribution: PNTWED)

2) ทำการผสมการแจกแจงปัวซองเข้ากับการแจกแจงเลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (ACRTE) ได้มาซึ่งการแจกแจงใหม่ที่มีชื่อว่า การแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (Poisson Adaptive Cubic Rank Transmuted Exponential Distribution: PACRTED)

3) หาคุณสมบัติต่าง ๆ ของการแจกแจง PNTWE และการแจกแจง PACRTE ซึ่งประกอบด้วย ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (Moment Generating Function: MGF) ฟังก์ชันก่อกำเนิดความน่าจะเป็น (Probability Generating Function: MGF) และโมเมนต์รอบจุดกำเนิด (Moment about origin)

4) ประมวลค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (MLE) ของการแจกแจง PNTWE และการแจกแจง PACRTE และเนื่องจากไม่สามารถหาผลลัพธ์ของค่าประมาณพารามิเตอร์ได้โดยตรง ผู้วิจัยจึงใช้วิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) เข้ามาช่วยในการประมวลค่าพารามิเตอร์โดยใช้โปรแกรมภาษา R

5) ทดสอบสอบความเหมาะสมของทั้ง 2 ของการแจกแจงที่ได้นำเสนอ ได้แก่ การแจกแจง PNTWE และการแจกแจง PACRTE โดยใช้การทดสอบภาวะสารูปดีด้วยสถิติไคกำลังสอง โดยพิจารณาพร้อมกับเกณฑ์สารสนเทศของอะกะอิเกะ และเกณฑ์สารสนเทศของเบส์ กับข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนทั้ง 3 ชุดข้อมูล นอกจากนี้ยังได้เปรียบเทียบการแจกแจงที่นำเสนอทั้ง 2 การแจกแจงกับการแจกแจงอื่น ได้แก่ การแจกแจงเบ้าซง การแจกแจงเบ้าซง-ลินด์ลีย์ (Sankaran, 1970) และการแจกแจงเบ้าซง-ลินด์ลีย์ 2 พารามิเตอร์ (Shanker, 2012)

การสร้างฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสำหรับข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

1) ทำการผสมการแจกแจงแกมมาเข้ากับการแจกแจงเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (NTWE) ได้มาซึ่งการแจกแจงใหม่ที่มีชื่อว่า การแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (Gamma New Two Weighted Exponential Distribution: GNTWED)

2) ทำการผสมการแจกแจงแกมมาเข้ากับการแจกแจงเลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (ACRTE) ได้มาซึ่งการแจกแจงใหม่ที่มีชื่อว่า การแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (Gamma Adaptive Cubic Rank Transmuted Exponential Distribution: GACRTED)

3) หาคุณสมบัติต่าง ๆ ของการแจกแจง GNTWE และการแจกแจง GACRTE ซึ่งประกอบด้วย ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (Moment Generating Function: MGF) ฟังก์ชันก่อกำเนิดความน่าจะเป็น (Probability Generating Function: MGF) และโมเมนต์รอบจุดกำเนิด (Moment about origin)

4) ประมวลค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (MLE) ของการแจกแจง GNTWE และการแจกแจง GACRTE และเนื่องจากไม่สามารถหาผลลัพธ์ของค่าประมาณพารามิเตอร์ได้โดยตรง ผู้วิจัยจึงใช้วิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) เข้ามาช่วยในการประมวลค่าพารามิเตอร์โดยใช้โปรแกรมภาษา R

5) ทดสอบสอบความเหมาะสมของทั้ง 2 ของการแจกแจงที่ได้นำเสนอ ได้แก่ การแจกแจง GNTWE และการแจกแจง GACRTE โดยการทดสอบภาวะสารูปดีด้วยสถิติโครโมโกรอฟ-สมิร์นอฟ และการทดสอบภาวะสารูปดีด้วยสถิติแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิ่ง โดยพิจารณาาร่วมกับเกณฑ์สารสนเทศของอะกะอิเกะ และเกณฑ์สารสนเทศของเบส์ กับข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนทั้ง 2 ชุดข้อมูล นอกจากนี้ยังได้เปรียบเทียบการแจกแจงที่นำเสนอทั้ง 2 การแจกแจงกับการแจกแจงอื่น ได้แก่ การแจกแจงเลขชี้กำลัง การแจกแจงแกมมา การแจกแจงไวบูล และการแจกแจงล็อกนอร์มัล

3.2.2 การสร้างตัวแบบคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย (BMS) โดยพิจารณาองค์ประกอบจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนร่วมกัน

ในงานวิจัยนี้ได้มีการสร้างแบบตัวแบบคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย โดยอ้างอิงจากข้อมูลประกันภัยรถยนต์จากบริษัทประกันวินาศภัยแห่งหนึ่งในประเทศออสเตรเลีย ซึ่งครอบคลุมระยะเวลา 1 ปี ตั้งแต่ปี 2004 ถึง 2005 (De Jong and Heller, 2008) ซึ่งประกอบด้วยข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน (ข้อมูลชุดที่ 1) และข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้เอาประกันภัย (ข้อมูลชุดที่ 4) ซึ่งทั้งสองชุดข้อมูลถูกเก็บรวบรวมจากผู้ถือกรมธรรม์ประกันภัยทั้งสิ้นจำนวน 17,143 ราย

1) การประมาณพารามิเตอร์ความเสี่ยงของการแจกแจงปัวซองสำหรับการนำไปใช้คำนวณเบี้ยประกันภายใต้องค์ประกอบของจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน (BMS_F) โดยใช้วิธีการของเบย์เซียน (Bayesian method) เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อน (Prior distribution) เป็นการแจกแจง NTWE และการแจกแจง ACRTE ตามลำดับ จากนั้นทำการคำนวณฟังก์ชันการแจกแจงหลัง $\pi_{\lambda|x}(\lambda|x)$ (Posterior distribution) ของพารามิเตอร์ความเสี่ยง เมื่อได้มาซึ่งการแจกแจงหลัง จึงนำมาประมาณค่าพารามิเตอร์ความเสี่ยง λ ภายใต้ฟังก์ชันความสูญเสียกำลังสอง (Square error loss function) ซึ่งคำนวณจากค่าคาดหวังของพารามิเตอร์ความเสี่ยงภายใต้ฟังก์ชันการแจกแจงหลัง ต่อมนำตัวประมาณที่ได้ $\hat{\lambda}$ ไปใช้คำนวณเบี้ยประกันภายใต้องค์ประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน (BMS_F)

2) การประมาณพารามิเตอร์ความเสี่ยงของการแจกแจงแกมมาสำหรับการนำไปใช้คำนวณเบี้ยประกันภายใต้องค์ประกอบของมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน (BMS_S) โดยใช้วิธีการของเบย์เซียน (Bayesian method) เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อน (Prior distribution) เป็นการแจกแจง NTWE และ การแจกแจง ACRTE ตามลำดับ จากนั้นทำการคำนวณฟังก์ชันการแจกแจง

หลัง $\pi_{B|x}(\beta|x)$ (Posterior distribution) ของพารามิเตอร์ความเสี่ยง เมื่อได้มาซึ่งการแจกแจงหลัง จึงประมาณค่าพารามิเตอร์ความเสี่ยง β ภายใต้การใช้ฟังก์ชันความสูญเสียกำลังสอง (Square error loss function) ซึ่งคำนวณจากค่าคาดหวังของพารามิเตอร์ความเสี่ยงภายใต้การแจกแจงหลังต่อมา นำตัวประมาณที่ได้ $\hat{\beta}$ ไปใช้คำนวณเบี้ยประกันภายใต้องค์ประกอบมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทน (BMS_S)

3) คำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยที่คำนวณมาจากผลคูณของเบี้ยประกันภายใต้องค์ประกอบของจำนวนครั้งในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนกับเบี้ยประกันภายใต้องค์ประกอบของมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทน แสดงดังนี้

$$\text{Premium} = BMS_F \times BMS_S$$

3.2.3 การสร้างตัวแบบในการประมาณค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายและการกำหนดเงินทุนเริ่มต้นขั้นต่ำของบริษัทประกันภัย

1) จำลองข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทน Y_n ภายใต้การแจกแจง GNTWE และ GACRTE ด้วยวิธี Acceptance-rejection ภายใต้ระยะเวลา 1 ปี ($n=365$) 3 ปี ($n=1,095$) และ 5 ปี ($n=1,825$) เมื่อ n แทนจำนวนวันที่กำหนด โดยทำซ้ำ 10,000 รอบสำหรับแต่ละกรณี

2) กำหนดค่าเผื่อความปลอดภัย (Safety loading) มีค่าอยู่ระหว่าง 0.10, 0.15, 0.20, ..., 0.30 การกำหนดอัตราเบี้ยประกันภัย c และการกำหนดค่าเงินทุนเริ่มต้นโดยมีมูลค่าระหว่าง 10000, 20000, 30000, ..., 100000 บาท คำนวณค่าเงินทุนสำรองในแต่ละวันภายใต้กระบวนการส่วนเกิน $U_n = U_{n-1} + c - Y_n$

3) คำนวณค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลาย $\hat{\phi}(t)$ จากตัวแบบที่ทำซ้ำทั้งหมด 10,000 รอบ โดยจะนับจำนวนรอบที่เงินทุนสำรอง U_n น้อยกว่าศูนย์หรือก็คือบริษัทล้มละลาย ซึ่งตัวแบบนี้จะพิจารณาภายใต้ระยะเวลา 1 ปี ($n=365$) 3 ปี ($n=1,095$) และ 5 ปี ($n=1,825$) ซึ่งคำนวณจาก

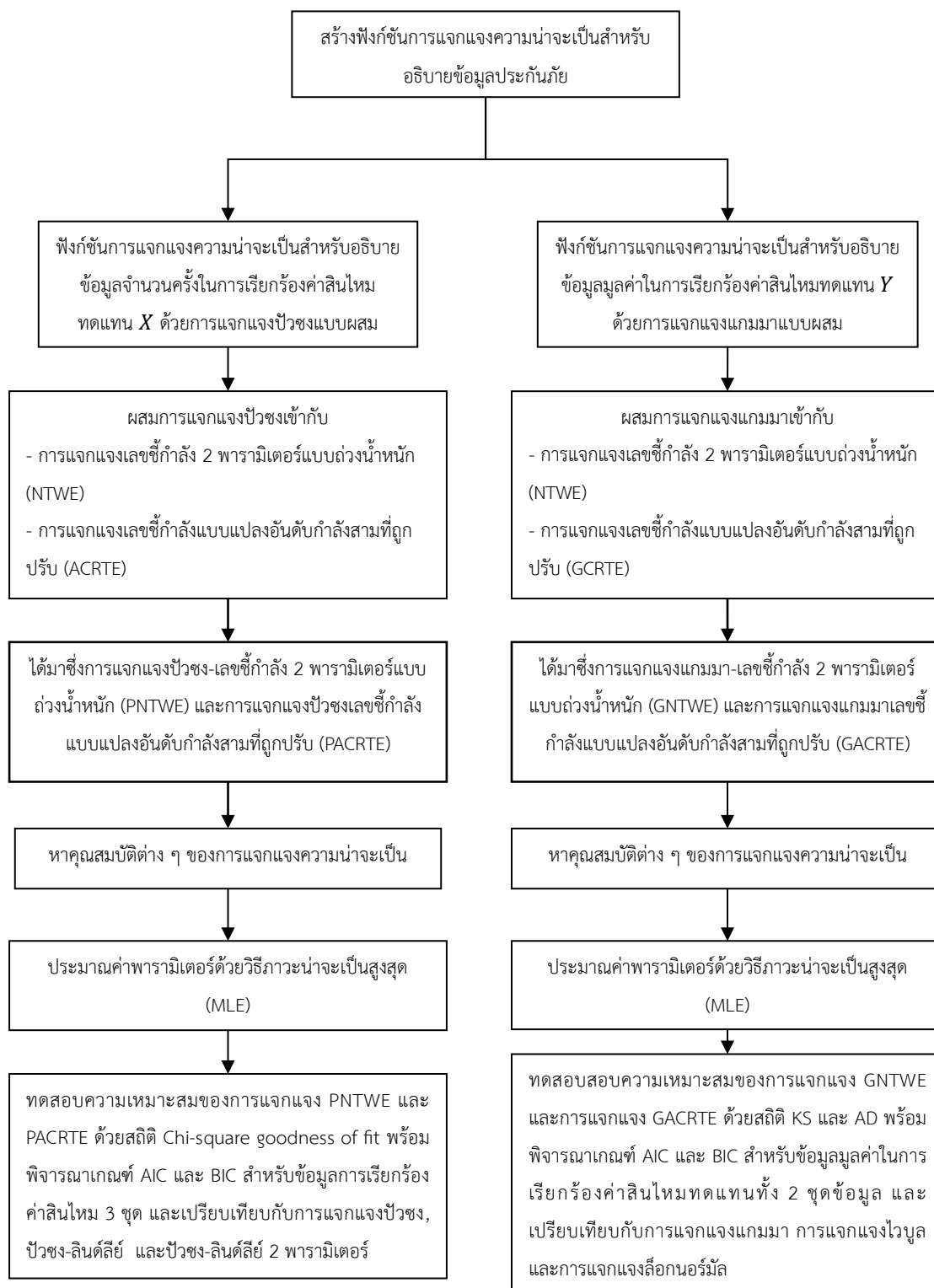
$$\hat{\phi}(t) = E/S$$

เมื่อ E แทนจำนวนรอบที่เงินทุนสำรอง U_n น้อยกว่าศูนย์ และ S เท่ากับ 10000

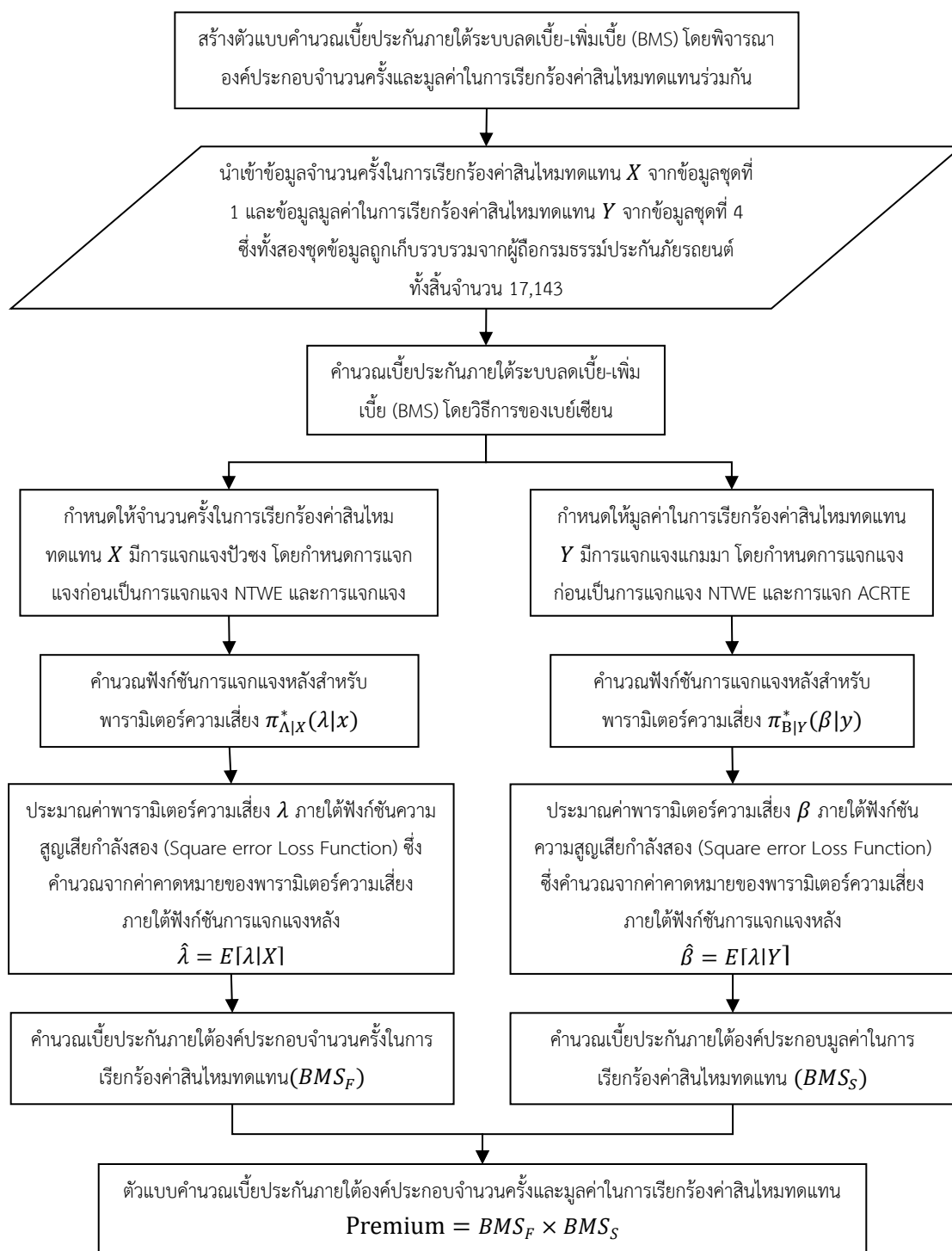
4) กำหนดฟังก์ชันที่ใช้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการล้มละลาย $\hat{\phi}(t)$ กับเงินทุนเริ่มต้น U_0 ได้แก่ ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

- 5) ประมาณค่าพารามิเตอร์ของฟังก์ชันความน่าจะเป็นในการล้มละลายกับเงินทุนเริ่มต้น $\hat{\phi}(t) = \gamma e^{\delta u}$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary Least Square method: OLS)
- 6) กำหนดเงินทุนเริ่มต้นขั้นต่ำ (Minimum Capital Reserve: MCR) ภายใต้ความเสี่ยงที่ยอมรับได้มีค่าเท่ากับ 0.01, 0.05 และ 0.10

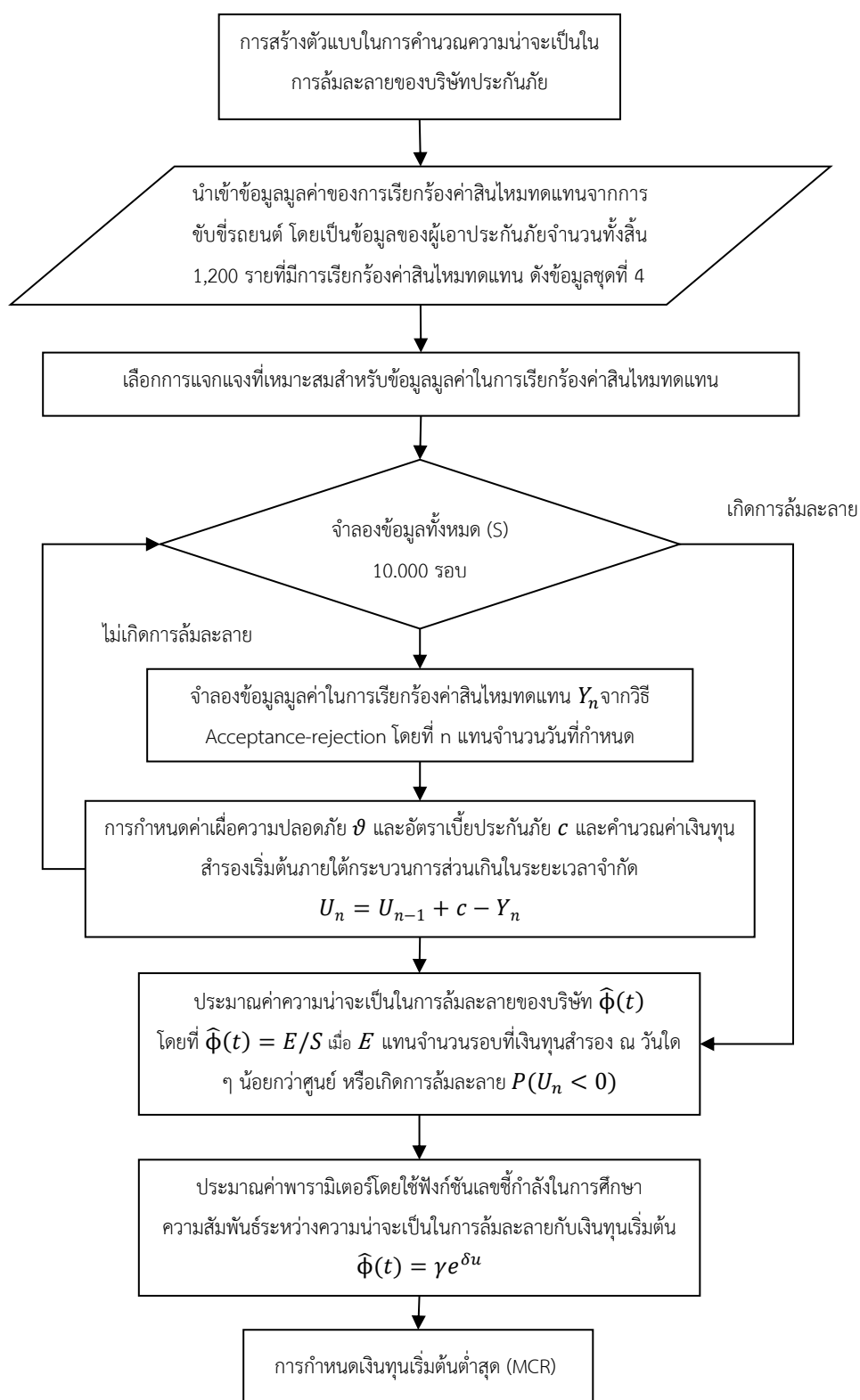




ภาพที่ 2 ขั้นตอนการดำเนินงานสำหรับการสร้างฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสำหรับอธิบาย
ข้อมูลจำนวนครั้งและข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน



ภาพที่ 3 ขั้นตอนการดำเนินงานสำหรับการสร้างตัวแบบคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย (BMS) โดยพิจารณาองค์ประกอบจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนร่วมกัน



ภาพที่ 4 ขั้นตอนการดำเนินงานสำหรับการสร้างแบบจำลองในการประมาณค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายและการกำหนดเงินทุนเริ่มต้นขั้นต่ำของบริษัทประกันภัย

บทที่ 4

ผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาภายใต้ข้อสมมติว่าจำนวนครั้งในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนและมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนของผู้ถือกรมธรรม์เป็นตัวแปรสุ่ม อีกทั้งจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนในแต่ละบุคคลเป็นอิสระต่อกัน

4.1 ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสำหรับอธิบายข้อมูลจำนวนครั้งและข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทน

การผสมการแจกแจง (Mixing Distribution)

การผสมการแจกแจงเป็นเทคนิคหนึ่งในการพัฒนาการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบดั้งเดิม โดยอาศัยแนวคิดของเบย์เซียน ซึ่งพิจารณาพารามิเตอร์เป็นตัวแปรสุ่ม เทคนิคนี้ช่วยเพิ่มความยืดหยุ่นให้การแจกแจงเพื่อรองรับลักษณะข้อมูลที่หลากหลายในปัจจุบันได้ดียิ่งขึ้น การแจกแจงแบบผสมจึงสามารถอธิบายลักษณะของข้อมูลได้มีประสิทธิภาพกว่าการแจกแจงแบบดั้งเดิม โดยเฉพาะในการสร้างตัวแบบที่ใช้ในการอธิบายลักษณะของข้อมูลที่เป็นจำนวนนับ เทคนิคนี้ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลายในหลายสาขาวิชา เพราะช่วยปรับให้การแจกแจงความน่าจะเป็นมีความเหมาะสมกับข้อมูลที่ซับซ้อนและหลากหลายมากยิ่งขึ้น

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มมีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น $f(x; \lambda)$ และฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม $F(x; \lambda)$ ที่มีพารามิเตอร์ λ และหากพารามิเตอร์ λ มีค่าที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์ λ จะถือว่าเป็นตัวแปรสุ่ม ดังนั้นจะมีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไข $f(x|\lambda)$ และฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไม่มีเงื่อนไขหรือการแจกแจงตามขอบที่สามารถหาได้โดยการอินทิเกรตฟังก์ชันการแจกแจงร่วม $f(x; \lambda)$ ที่ครอบคลุมค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของพารามิเตอร์ λ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x; \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f(x|\lambda) g(\lambda) d\lambda \quad (4.1)$$

โดยที่ $g(\lambda)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม $\Lambda = \lambda$ และเรียก $g(\lambda)$ ว่าฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นก่อนซึ่งเป็นฟังก์ชันการแจกแจงของพารามิเตอร์ λ

4.1.1 ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสำหรับข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

ในบริบทของการประกันภัยรถยนต์ ผู้ถือกรมธรรม์ทุกคนจะมีค่าพารามิเตอร์ความเสี่ยงภัยในการประสบอุบัติเหตุ พารามิเตอร์ความเสี่ยงภัยนี้เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าของตัวแปรสุ่มแตกต่างกันไปตามประวัติการขับขี่ของผู้ถือกรมธรรม์แต่ละราย และการแจกแจงของตัวแปรสุ่มนี้เรียกว่า การแจกแจงก่อน (Prior distribution) ในหลายงานวิจัยแสดงให้เห็นว่าการผสมการแจกแจงปัวซองมีความเหมาะสมกับข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนมากกว่าการใช้การแจกแจงปัวซองเพียงอย่างเดียว ผู้วิจัยจึงนำเสนอวิธีในการสร้างฟังก์ชันการแจกแจงของจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนโดยการผสมการแจกแจงปัวซองเข้ากับการแจกแจงเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (NTWED) และการผสมการแจกแจงปัวซองเข้ากับการแจกแจงเลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (ACRTED) ดังต่อไปนี้

การแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (PNTWED)

สมมติให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน โดยที่ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปัวซองและมีพารามิเตอร์ λ ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ที่มีพารามิเตอร์ λ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$f(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} ; \lambda > 0, x = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

และค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม X มีค่าเท่ากับพารามิเตอร์ λ นั่นคือ $E[X|\lambda] = \lambda$

ผู้ถือกรมธรรม์ทุกคนล้วนมีความเสี่ยงที่จะเกิดอุบัติเหตุ โดยค่าความเสี่ยงภัยนี้สามารถวัดได้และมีค่าที่แตกต่างกันโดยธรรมชาติของแต่ละบุคคล ซึ่งเป็นจำนวนการเรียกร้องเฉลี่ยของแต่ละบุคคลค่านี้แสดงได้ด้วย λ และถือว่าเป็นตัวแปรสุ่มของความเสียหาย ผู้วิจัยจึงได้นำเสนอการแจกแจงภายใต้สมมติฐานที่ว่า พารามิเตอร์ λ มีการการแจกแจงเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (NTWED) ด้วยพารามิเตอร์ α และ β ซึ่ง สามารถแสดงฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นได้ดังนี้

$$g(\lambda) = \frac{\alpha(\beta + 1)^2}{\beta^2} e^{-\alpha\lambda} (1 - (1 + \alpha\beta\lambda)e^{-\alpha\beta\lambda}) ; \alpha, \beta > 0, \lambda > 0 \quad (4.3)$$

และค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม Λ คือ $E[\Lambda] = \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{(\alpha+\alpha\beta)^2} - \frac{2}{(\alpha+\alpha\beta)^3} \right)$

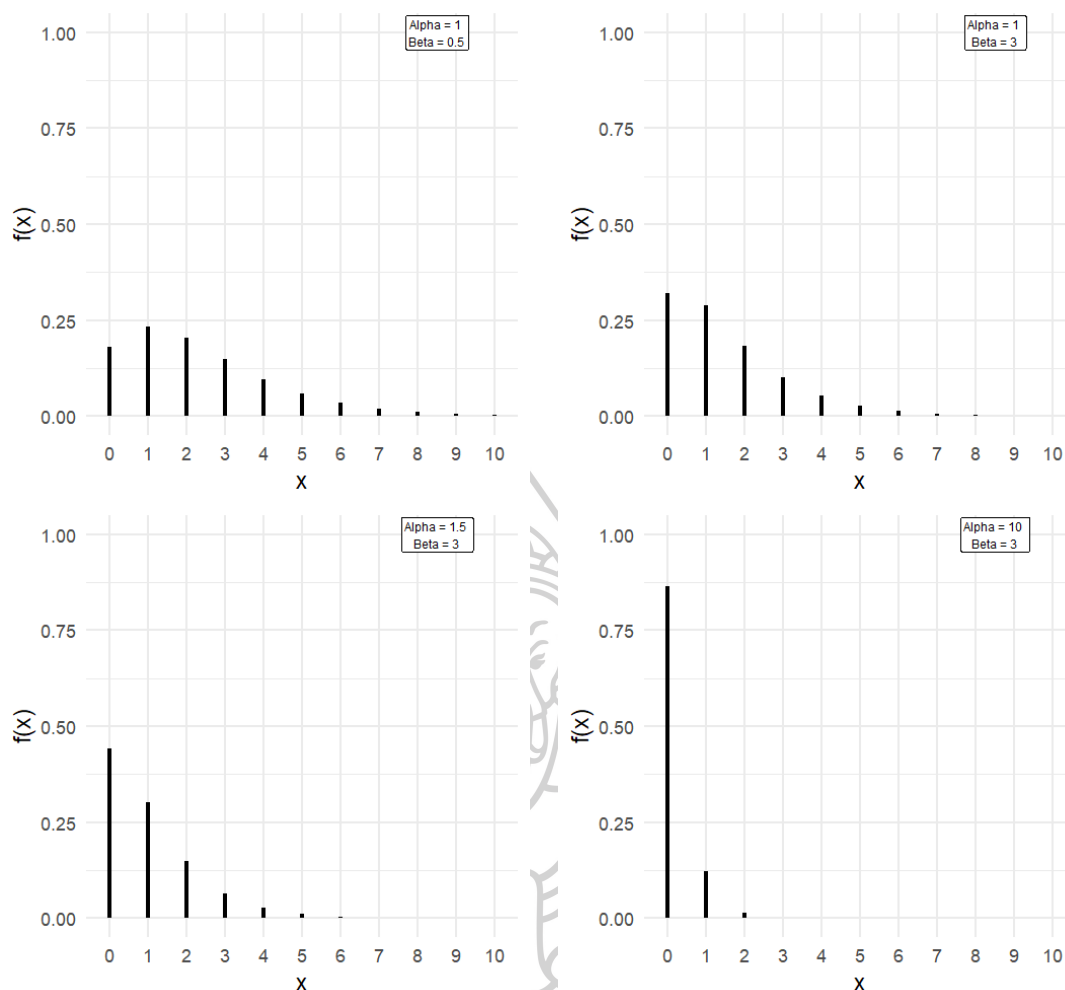
ผู้วิจัยได้ทำการสร้างฟังก์ชันการแจกแจงโดยการผสมการแจกแจงปัวซองเข้ากับการแจกแจงเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (NTWED) โดยมีขั้นตอนดังนี้

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^{\infty} f(x|\lambda)g(\lambda)d\lambda \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \cdot \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} e^{-\alpha\lambda}(1 - (1 + \alpha\beta\lambda)e^{-\alpha\beta\lambda})d\lambda \\
 &= \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2\Gamma(x+1)} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1+\alpha)}\lambda^x(1 - (1 + \alpha\beta\lambda)e^{-\alpha\beta\lambda})d\lambda \\
 &= \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2\Gamma(x+1)} \left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda(1+\alpha)}\lambda^x d\lambda - \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1+\alpha+\alpha\beta)}\lambda^x d\lambda \right. \\
 &\quad \left. - \alpha\beta \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1+\alpha+\alpha\beta)}\lambda^{x+1} d\lambda \right) \\
 &= \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2\Gamma(x+1)} \left(\int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{(1+\alpha)} \right)^x \frac{du}{(1+\alpha)} \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{(1+\alpha+\alpha\beta)} \right)^x \frac{du}{(1+\alpha+\alpha\beta)} \right. \\
 &\quad \left. - \alpha\beta \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{(1+\alpha+\alpha\beta)} \right)^{x+1} \frac{du}{(1+\alpha+\alpha\beta)} \right) \\
 &= \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2\Gamma(x+1)} \left(\frac{\Gamma(x+1)}{(1+\alpha)^{x+1}} - \frac{\Gamma(x+1)}{(1+\alpha+\alpha\beta)^{x+1}} - \frac{\alpha\beta\Gamma(x+2)}{(1+\alpha+\alpha\beta)^{x+2}} \right)
 \end{aligned}$$

ผลลัพธ์ที่ได้จากการผสมการแจกแจงมีชื่อเรียกว่า การแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (Poisson New Two Weighted Exponential Distribution: PNTWED) โดยแสดงฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นได้ดังนี้

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} \left(\frac{1}{(1+\alpha)^{x+1}} - \frac{1}{(1+\alpha+\alpha\beta)^{x+1}} - \frac{\alpha\beta(x+1)}{(1+\alpha+\alpha\beta)^{x+2}} \right) \quad (4.4)$$

โดยที่ $\alpha, \beta > 0$ และ $x = 0, 1, 2, \dots$



ภาพที่ 5 รูปร่างฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นของการแจกแจง PNTWED ที่ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ

คุณสมบัติของการแจกแจง

ต่อไปนี้จะแสดงถึงคุณสมบัติของการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (PNTWED) ในงานนี้จะทำการหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (Moment Generating Function ; MGF) ฟังก์ชันก่อกำเนิดความน่าจะเป็น (Probability Generating Function ; PGF) และโมเมนต์รอบจุดกำเนิด (Moment r^{th} about origin) ซึ่งแสดงดังต่อไปนี้

ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (PNTWED) ด้วยพารามิเตอร์ α และ β โดยฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของ $X \sim PNTWED(\alpha, \beta)$ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$M_X(t) = E(e^{tx})$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \sum_{i=1}^n e^{tx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \cdot \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} e^{-\alpha\lambda} (1 - (1 + \alpha\beta\lambda)e^{-\alpha\beta\lambda}) d\lambda \\
&= \int_0^\infty e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} e^{-\alpha\lambda} (1 - (1 + \alpha\beta\lambda)e^{-\alpha\beta\lambda}) d\lambda \\
&= \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} \int_0^\infty e^{-\lambda(1+\alpha-e^t)} (1 - (1 + \alpha\beta\lambda)e^{-\alpha\beta\lambda}) d\lambda \\
&= \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda(1+\alpha-e^t)} d\lambda - \int_0^\infty e^{-\lambda(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)} d\lambda \right. \\
&\quad \left. - \alpha\beta \int_0^\infty e^{-\lambda(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)} \lambda d\lambda \right) \\
&= \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} \left(\int_0^\infty e^{-u} \frac{du}{(1+\alpha-e^t)} - \int_0^\infty e^{-u} \frac{du}{(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)} \right. \\
&\quad \left. - \alpha\beta \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)} \right) \frac{du}{(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)} \right) \\
&= \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} \left(\frac{\Gamma(1)}{(1+\alpha-e^t)} - \frac{\Gamma(1)}{(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)} - \frac{\alpha\beta\Gamma(2)}{(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^2} \right)
\end{aligned}$$

ดังนั้นฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก แสดงได้ดังนี้

$$M_X(t) = \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} \left(\frac{1}{(1+\alpha-e^t)} - \frac{1}{(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)} - \frac{\alpha\beta}{(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^2} \right) \quad (4.5)$$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดความน่าจะเป็น

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (PNTWED) ด้วยพารามิเตอร์ α และ β โดยฟังก์ชันก่อกำเนิดความน่าจะเป็นของ $X \sim PNTWED(\alpha, \beta)$ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
P_X(t) &= E(t^x) \\
&= \int_0^\infty \sum_{i=1}^n t^x \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \cdot \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} e^{-\alpha\lambda} (1 - (1 + \alpha\beta\lambda)e^{-\alpha\beta\lambda}) d\lambda \\
&= \int_0^\infty e^{\lambda(t-1)} \cdot \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} e^{-\alpha\lambda} (1 - (1 + \alpha\beta\lambda)e^{-\alpha\beta\lambda}) d\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} \int_0^\infty e^{-\lambda(1+\alpha-t)} (1 - (1+\alpha\beta\lambda)e^{-\alpha\beta\lambda}) d\lambda \\
&= \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda(1+\alpha-t)} d\lambda - \int_0^\infty e^{-\lambda(1+\alpha+\alpha\beta-t)} d\lambda \right. \\
&\quad \left. - \alpha\beta \int_0^\infty e^{-\lambda(1+\alpha+\alpha\beta-t)} \lambda d\lambda \right) \\
&= \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} \left(\int_0^\infty e^{-u} \frac{du}{(1+\alpha-t)} - \int_0^\infty e^{-u} \frac{du}{(1+\alpha+\alpha\beta-t)} \right. \\
&\quad \left. - \alpha\beta \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{(1+\alpha+\alpha\beta-t)} \right) \frac{du}{(1+\alpha+\alpha\beta-t)} \right) \\
&= \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} \left(\frac{\Gamma(1)}{(1+\alpha-t)} - \frac{\Gamma(1)}{(1+\alpha+\alpha\beta-t)} - \frac{\alpha\beta\Gamma(2)}{(1+\alpha+\alpha\beta-t)^2} \right)
\end{aligned}$$

ดังนั้นฟังก์ชันก่อกำเนิดความน่าจะเป็นของการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก แสดงได้ดังนี้

$$P_X(t) = \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} \left(\frac{1}{(1+\alpha-t)} - \frac{1}{(1+\alpha+\alpha\beta-t)} - \frac{\alpha\beta}{(1+\alpha+\alpha\beta-t)^2} \right) \quad (4.6)$$

โมเมนต์รอบจุดกำเนิด

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก โมเมนต์ที่ r รอบจุดศูนย์กลางหรือรอบจุดกำเนิดของสำหรับ $X \sim PNTWED(\alpha, \beta)$ หาได้โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ที่ r รอบจุดกำเนิดกับฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ แสดงดังนี้

$$E(X^r) = \frac{\partial^r M_X(t)}{\partial t^r} \Big|_{t=0}; r = 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

โมเมนต์ที่ 1 รอบจุดศูนย์กลาง $r = 1$ แสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
E(X) &= M'_X(t) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} \left(\frac{1}{(1+\alpha-e^t)} - \frac{1}{(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)} - \frac{\alpha\beta}{(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^2} \right) \right] \\
&= \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial t} [(1+\alpha-e^t)^{-1} - (1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-1} - \alpha\beta(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-2}] \\
&= \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} [e^t(1+\alpha-e^t)^{-2} - e^t(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-2} \\
&\quad - 2\alpha\beta e^t(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-3}]
\end{aligned}$$

แทนค่า $t = 0$; จะได้

$$E(X) = \frac{\alpha(\beta + 1)^2}{\beta^2} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{(\alpha + \alpha\beta)^2} - \frac{-2\alpha\beta}{(\alpha + \alpha\beta)^3} \right) \quad (4.8)$$

โมเมนต์ที่ 2 รอบจุดศูนย์กลาง $r = 2$ แสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E(X^2) &= M_X''(t)|_{t=0} \\ &= \frac{\alpha(\beta + 1)^2}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial t} [e^t(1 + \alpha - e^t)^{-2} - e^t(1 + \alpha + \alpha\beta - e^t)^{-2} \\ &\quad - 2\alpha\beta e^t(1 + \alpha + \alpha\beta - e^t)^{-3}] \\ &= \frac{\alpha(\beta + 1)^2}{\beta^2} [(e^t \cdot 2e^t(1 + \alpha - e^t)^{-3} + (1 + \alpha - e^t)^{-2} \cdot e^t) \\ &\quad - (e^t \cdot 2e^t(1 + \alpha + \alpha\beta - e^t)^{-3} + (1 + \alpha + \alpha\beta - e^t)^{-2} \cdot e^t) \\ &\quad - 2\alpha\beta(e^t \cdot 3e^t(1 + \alpha + \alpha\beta - e^t)^{-4} + (1 + \alpha + \alpha\beta - e^t)^{-3} \cdot e^t)] \\ &= \frac{\alpha(\beta + 1)^2}{\beta^2} [2e^{2t}(1 + \alpha - e^t)^{-3} + e^t(1 + \alpha - e^t)^{-2} - 2e^{2t}(1 + \alpha + \alpha\beta - e^t)^{-3} \\ &\quad - e^t(1 + \alpha + \alpha\beta - e^t)^{-2} - 6\alpha\beta e^{2t}(1 + \alpha + \alpha\beta - e^t)^{-4} \\ &\quad - 2\alpha\beta e^t(1 + \alpha + \alpha\beta - e^t)^{-3}] \\ &= \frac{\alpha(\beta + 1)^2}{\beta^2} [e^t(1 + \alpha - e^t)^{-2} - e^t(1 + \alpha + \alpha\beta - e^t)^{-2} + 2e^{2t}(1 + \alpha - e^t)^{-3} \\ &\quad - (2e^{2t} + 2\alpha\beta e^t)(1 + \alpha + \alpha\beta - e^t)^{-3} - 6\alpha\beta e^{2t}(1 + \alpha + \alpha\beta - e^t)^{-4}] \end{aligned}$$

แทนค่า $t = 0$; จะได้

$$E(X^2) = \frac{\alpha(\beta + 1)^2}{\beta^2} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} - \frac{1}{(\alpha + \alpha\beta)^2} - \frac{2(\alpha\beta + 1)}{(\alpha + \alpha\beta)^3} - \frac{6\alpha\beta}{(\alpha + \alpha\beta)^4} \right) \quad (4.9)$$

โมเมนต์ที่ 3 รอบจุดศูนย์กลาง $r = 3$ แสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E(X^3) &= M_X'''(t)|_{t=0} \\ &= \frac{\alpha(\beta + 1)^2}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial t} [e^t(1 + \alpha - e^t)^{-2} - e^t(1 + \alpha + \alpha\beta - e^t)^{-2} \\ &\quad + 2e^{2t}(1 + \alpha - e^t)^{-3} - (2e^{2t} + 2\alpha\beta e^t)(1 + \alpha + \alpha\beta - e^t)^{-3} \\ &\quad - 6\alpha\beta e^{2t}(1 + \alpha + \alpha\beta - e^t)^{-4}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} [(e^t \cdot 2e^t(1+\alpha-e^t)^{-3} + (1+\alpha-e^t)^{-2} \cdot e^t) \\
&\quad - (e^t \cdot 2e^t(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-3} + (1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-2} \cdot e^t) \\
&\quad + 2(e^{2t} \cdot 3e^t(1+\alpha-e^t)^{-4} + (1+\alpha-e^t)^{-3} \cdot e^{2t}) \\
&\quad - ((2e^{2t} + 2\alpha\beta e^t) \cdot 3e^t(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-4} + (1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-3} \\
&\quad \cdot (4e^{2t} + 2\alpha\beta e^t)) \\
&\quad - 6\alpha\beta(e^{2t} \cdot 4e^t(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-5} + (1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-4} \cdot e^{2t})] \\
&= \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} [2e^{2t}(1+\alpha-e^t)^{-3} + e^t(1+\alpha-e^t)^{-2} - 2e^{2t}(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-3} \\
&\quad - e^t(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-2} + 6e^{3t}(1+\alpha-e^t)^{-4} + 2e^{2t}(1+\alpha-e^t)^{-3} \\
&\quad - (6e^{3t} + 6\alpha\beta e^{2t})(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-4} \\
&\quad - (4e^{2t} + 2\alpha\beta e^t)(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-3} - 24\alpha\beta e^{3t}(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-5} \\
&\quad - 6\alpha\beta e^{2t}(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-4}]
\end{aligned}$$

แทนค่า $t = 0$; จะได้

$$\begin{aligned}
E(X^3) &= \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{4}{\alpha^3} + \frac{6}{\alpha^4} - \frac{1}{(\alpha+\alpha\beta)^2} - \frac{2(\alpha\beta+3)}{(\alpha+\alpha\beta)^3} - \frac{6(2\alpha\beta+1)}{(\alpha+\alpha\beta)^4} \right. \\
&\quad \left. - \frac{24\alpha\beta}{(\alpha+\alpha\beta)^5} \right) \quad (4.10)
\end{aligned}$$

โมเมนต์ที่ 4 รอบจุดศูนย์กลาง $r = 4$ แสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
E(X^4) &= M_X''''(t)|_{t=0} \\
&= \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial t} [2e^{2t}(1+\alpha-e^t)^{-3} + e^t(1+\alpha-e^t)^{-2} - 2e^{2t}(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-3} \\
&\quad - e^t(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-2} + 6e^{3t}(1+\alpha-e^t)^{-4} + 2e^{2t}(1+\alpha-e^t)^{-3} \\
&\quad - (6e^{3t} + 6\alpha\beta e^{2t})(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-4} \\
&\quad - (4e^{2t} + 2\alpha\beta e^t)(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-3} - 24\alpha\beta e^{3t}(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-5} \\
&\quad - 6\alpha\beta e^{2t}(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-4}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} \left[(2e^{2t} \cdot 3e^t(1+\alpha-e^t)^{-4} + (1+\alpha-e^t)^{-3} \cdot 4e^{2t}) \right. \\
&\quad + (e^t \cdot 2e^t(1+\alpha-e^t)^{-3} + (1+\alpha-e^t)^{-2} \cdot e^t) \\
&\quad - (2e^{2t} \cdot 3e^t(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-4} + (1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-3} \cdot 4e^{2t}) \\
&\quad - (e^t \cdot 2e^t(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-3} + (1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-2} \cdot e^t) \\
&\quad + (6e^{3t} \cdot 4e^t(1+\alpha-e^t)^{-5} + (1+\alpha-e^t)^{-4} \cdot 18e^{3t}) \\
&\quad + (2e^{2t} \cdot 3e^t(1+\alpha-e^t)^{-4} + (1+\alpha-e^t)^{-3} \cdot 4e^{2t}) \\
&\quad - \left((6e^{3t} + 6\alpha\beta e^{2t}) \cdot 4e^t(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-5} + (1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-4} \right. \\
&\quad \cdot (18e^{3t} + 12\alpha\beta e^{2t}) \Big) \\
&\quad - \left((4e^{2t} + 2\alpha\beta e^t) \cdot 3e^t(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-4} + (1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-3} \right. \\
&\quad \cdot (8e^{2t} + 2\alpha\beta e^t) \Big) \\
&\quad - (24\alpha\beta e^{3t} \cdot 5e^t(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-6} + (1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-5} \cdot 72\alpha\beta e^{3t}) \\
&\quad \left. - (6\alpha\beta e^{2t} \cdot 4e^t(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-5} + (1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-4} \cdot 12\alpha\beta e^{2t}) \right] \\
&= \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} [e^{3t}(1+\alpha-e^t)^{-4} + 4e^{2t}(1+\alpha-e^t)^{-3} + 2e^{2t}(1+\alpha-e^t)^{-3} \\
&\quad + e^t(1+\alpha-e^t)^{-2} - 6e^{3t}(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-4} \\
&\quad - 4e^{2t}(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-3} - 2e^{2t}(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-3} \\
&\quad - e^t \cdot (1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-2} + 24e^{4t}(1+\alpha-e^t)^{-5} \\
&\quad + 18e^{3t}(1+\alpha-e^t)^{-4} + 6e^{3t}(1+\alpha-e^t)^{-4} + 4e^{2t}(1+\alpha-e^t)^{-3} \\
&\quad - (24e^{4t} + 24\alpha\beta e^{3t})(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-5} \\
&\quad - (18e^{3t} + 12\alpha\beta e^{2t})(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-4} \\
&\quad - (12e^{3t} + 6\alpha\beta e^{2t})(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-4} \\
&\quad - (8e^{2t} + 2\alpha\beta e^t)(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-3} - 120\alpha\beta e^{4t}(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-6} \\
&\quad - 72\alpha\beta e^{3t}(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-5} - 24\alpha\beta e^{3t}(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-5} \\
&\quad \left. - 12\alpha\beta e^{2t}(1+\alpha+\alpha\beta-e^t)^{-4} \right]
\end{aligned}$$

แทนค่า $t = 0$; จะได้

$$\begin{aligned}
E(X^4) &= \frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{10}{\alpha^3} + \frac{30}{\alpha^4} + \frac{24}{\alpha^5} - \frac{1}{(\alpha+\alpha\beta)^2} - \frac{2(\alpha\beta+5)}{(\alpha+\alpha\beta)^3} - \frac{6(5\alpha\beta+6)}{(\alpha+\alpha\beta)^4} \right. \\
&\quad \left. - \frac{24(5\alpha\beta+1)}{(\alpha+\alpha\beta)^5} - \frac{120\alpha}{(\alpha+\alpha\beta)^5} \right) \quad (4.11)
\end{aligned}$$

การแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (PACRTED)

สมมติให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน โดยที่ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปัวซองและมีพารามิเตอร์ λ ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ที่มีพารามิเตอร์ λ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$f(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} ; \lambda > 0, x = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

และค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม X มีค่าเท่ากับพารามิเตอร์ λ นั่นคือ $E[X|\lambda] = \lambda$

ผู้ถือกรมธรรม์ทุกคนล้วนมีความเสี่ยงที่จะเกิดอุบัติเหตุ โดยค่าความเสี่ยงภัยนี้สามารถวัดได้ และมีค่าที่แตกต่างกันโดยธรรมชาติของแต่ละบุคคล ซึ่งเป็นจำนวนการเรียกร้องเฉลี่ยของแต่ละบุคคล ค่านี้แสดงได้ด้วย λ และถือว่าเป็นตัวแปรสุ่มของความเสียหาย ผู้วิจัยจึงได้นำเสนอการแจกแจงภายใต้สมมติฐานที่ว่า พารามิเตอร์ λ มีการแจกแจงเลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (PACRTED) ด้วยพารามิเตอร์ θ และ p ซึ่ง สามารถแสดงฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นได้ดังนี้

$$g(\lambda) = \theta e^{-\theta\lambda}(1 - e^{-p^2} + 6e^{-p^2-\theta\lambda} - 6e^{-p^2-2\theta\lambda}) ; \theta > 0, p \in \mathbb{R} \quad (4.13)$$

และค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม Λ คือ $E[\Lambda] = \frac{1 - e^{-p^2} + \frac{3e^{-p^2}}{2} - \frac{2e^{-p^2}}{3}}{\theta}$

ผู้วิจัยได้ทำการสร้างฟังก์ชันการแจกแจงโดยการผสมการแจกแจงปัวซองเข้ากับการแจกแจงเลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (PACRTED) โดยมีขั้นตอนดังนี้

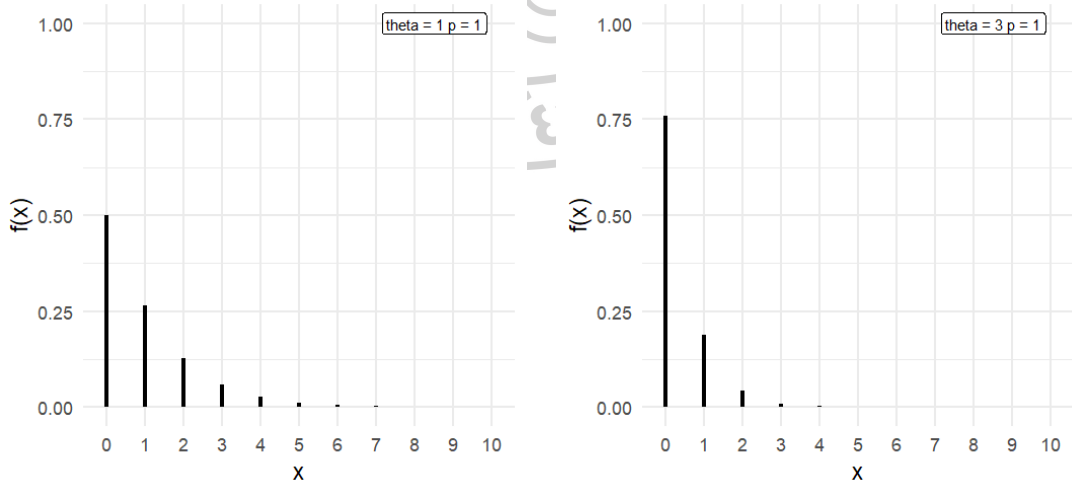
$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} f(x|\lambda)g(\lambda)d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \cdot \theta e^{-\theta\lambda}(1 - e^{-p^2} + 6e^{-p^2-\theta\lambda} - 6e^{-p^2-2\theta\lambda})d\lambda \\ &= \frac{\theta}{\Gamma(x+1)} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1+\theta)}\lambda^x(1 - e^{-p^2} + 6e^{-p^2-\theta\lambda} - 6e^{-p^2-2\theta\lambda})d\lambda \\ &= \frac{\theta}{\Gamma(x+1)} \left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda(1+\theta)}\lambda^x d\lambda - e^{-p^2} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1+\theta)}\lambda^x d\lambda \right. \\ &\quad \left. + 6e^{-p^2} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1+2\theta)}\lambda^x d\lambda - 6e^{-p^2} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1+3\theta)}\lambda^x d\lambda \right) \end{aligned}$$

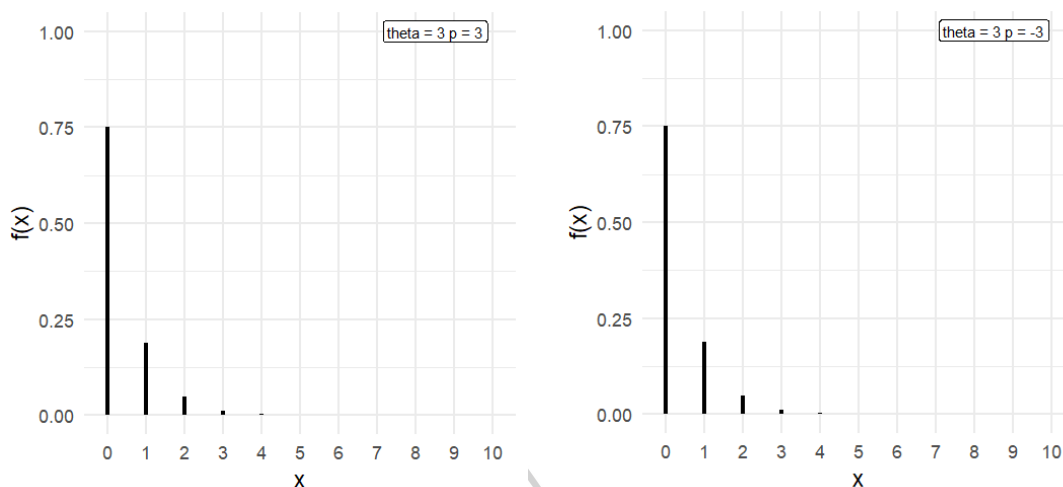
$$\begin{aligned}
&= \frac{\theta}{\Gamma(x+1)} \left(\int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{(1+\theta)} \right)^x \frac{du}{(1+\theta)} \right. \\
&\quad - e^{-p^2} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{(1+\theta)} \right)^x \frac{du}{(1+\theta)} \\
&\quad + 6e^{-p^2} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{(1+2\theta)} \right)^x \frac{du}{(1+2\theta)} \\
&\quad \left. - 6e^{-p^2} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{(1+3\theta)} \right)^x \frac{du}{(1+3\theta)} \right) \\
&= \frac{\theta}{\Gamma(x+1)} \left(\frac{\Gamma(x+1)}{(1+\theta)^{x+1}} - \frac{e^{-p^2}\Gamma(x+1)}{(1+\theta)^{x+1}} + \frac{6e^{-p^2}\Gamma(x+1)}{(1+2\theta)^{x+1}} - \frac{6e^{-p^2}\Gamma(x+1)}{(1+3\theta)^{x+1}} \right)
\end{aligned}$$

ผลลัพธ์ที่ได้จากการผสมการแจกแจงมีชื่อเรียกว่า การแจกแจงแ่งปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (Poisson Adaptive Cubic Rank Transmuted Exponential Distribution: PACRTED) โดยแสดงฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นได้ดังนี้

$$f(x; p, \theta) = \frac{\theta(1 - e^{-p^2})}{(1+\theta)^{x+1}} + \frac{6e^{-p^2}\theta}{(1+2\theta)^{x+1}} - \frac{6e^{-p^2}\theta}{(1+3\theta)^{x+1}} \quad (4.14)$$

โดยที่ $\theta > 0, p \in \mathbb{R}$ และ $x = 0, 1, 2, \dots$





ภาพที่ 6 แสดงรูปร่างฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นของการแจกแจง PACRTED ที่ค่าพารามิเตอร์ต่าง

คุณสมบัติของการแจกแจง

ต่อไปนี้จะแสดงถึงคุณสมบัติของการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (PACRTED) ในงานนี้จะทำการหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (Moment Generating Function ; MGF) ฟังก์ชันก่อกำเนิดความน่าจะเป็น (Probability Generating Function ; PGF) และโมเมนต์รอบจุดกำเนิด (Moment r^{th} about origin) ซึ่งแสดงดังต่อไปนี้

ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (PACRTED) ด้วยพารามิเตอร์ θ และ p โดยฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของ $X \sim \text{PACRTED}(\theta, p)$ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$M_X(t) = E(e^{tx})$$

$$= \int_0^\infty \sum_{x=0}^\infty e^{tx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \cdot \theta e^{-\theta \lambda} (1 - e^{-p^2} + 6e^{-p^2 - \theta \lambda} - 6e^{-p^2 - 2\theta \lambda}) d\lambda$$

$$= \int_0^\infty e^{\lambda(e^t - 1)} \cdot \theta e^{-\theta \lambda} (1 - e^{-p^2} + 6e^{-p^2 - \theta \lambda} - 6e^{-p^2 - 2\theta \lambda}) d\lambda$$

$$= \theta \int_0^\infty e^{-\lambda(1 + \theta - e^t)} (1 - e^{-p^2} + 6e^{-p^2 - \theta \lambda} - 6e^{-p^2 - 2\theta \lambda}) d\lambda$$

$$\begin{aligned}
&= \theta \left[\int_0^\infty e^{-\lambda(1+\theta-e^t)} d\lambda - e^{-p^2} \int_0^\infty e^{-\lambda(1+\theta-e^t)} d\lambda \right. \\
&\quad \left. + 6e^{-p^2} \int_0^\infty e^{-\lambda(1+2\theta-e^t)} d\lambda - 6e^{-p^2} \int_0^\infty e^{-\lambda(1+3\theta-e^t)} d\lambda \right] \\
&= \theta \left[\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{(1+\theta-e^t)} d\lambda - e^{-p^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(1+\theta-e^t)}}{(1+\theta-e^t)} d\lambda \right. \\
&\quad \left. + 6e^{-p^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(1+2\theta-e^t)}}{(1+2\theta-e^t)} d\lambda - 6e^{-p^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(1+3\theta-e^t)}}{(1+3\theta-e^t)} d\lambda \right] \\
&= \frac{\theta}{(1+\theta-e^t)} - \frac{\theta e^{-p^2}}{(1+\theta-e^t)} + \frac{6\theta e^{-p^2}}{(1+2\theta-e^t)} - \frac{6\theta e^{-p^2}}{(1+3\theta-e^t)}
\end{aligned}$$

ดังนั้นฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับแสดงได้ดังนี้

$$M_X(t) = \frac{\theta(1-e^{-p^2})}{(1+\theta-e^t)} + \frac{6\theta e^{-p^2}}{(1+2\theta-e^t)} - \frac{6\theta e^{-p^2}}{(1+3\theta-e^t)} \quad (4.15)$$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดความน่าจะเป็น

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (PACRTED) ด้วยพารามิเตอร์ θ และ p โดยฟังก์ชันก่อกำเนิดความน่าจะเป็นของ $X \sim \text{PACRTED}(\theta, p)$ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
P_X(t) &= E(t^x) \\
&= \int_0^\infty \sum_{x=0}^\infty t^x \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \cdot \theta e^{-\theta \lambda} (1 - e^{-p^2} + 6e^{-p^2-\theta \lambda} - 6e^{-p^2-2\theta \lambda}) d\lambda \\
&= \int_0^\infty e^{\lambda(t-1)} \cdot \theta e^{-\theta \lambda} (1 - e^{-p^2} + 6e^{-p^2-\theta \lambda} - 6e^{-p^2-2\theta \lambda}) d\lambda \\
&= \theta \int_0^\infty e^{-\lambda(1+\theta-t)} (1 - e^{-p^2} + 6e^{-p^2-\theta \lambda} - 6e^{-p^2-2\theta \lambda}) d\lambda \\
&= \theta \left[\int_0^\infty e^{-\lambda(1+\theta-t)} d\lambda - e^{-p^2} \int_0^\infty e^{-\lambda(1+\theta-t)} d\lambda + 6e^{-p^2} \int_0^\infty e^{-\lambda(1+2\theta-t)} d\lambda \right. \\
&\quad \left. - 6e^{-p^2} \int_0^\infty e^{-\lambda(1+3\theta-t)} d\lambda \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \theta \left[\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{(1+\theta-t)} d\lambda - e^{-p^2} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{(1+\theta-t)} d\lambda \right. \\
&\quad \left. + 6e^{-p^2} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{(1+2\theta-t)} d\lambda - 6e^{-p^2} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{(1+3\theta-t)} d\lambda \right] \\
&= \frac{\theta}{(1+\theta-t)} - \frac{\theta e^{-p^2}}{(1+\theta-t)} + \frac{6\theta e^{-p^2}}{(1+2\theta-t)} - \frac{6\theta e^{-p^2}}{(1+3\theta-t)}
\end{aligned}$$

ดังนั้นฟังก์ชันก่อกำเนิดความน่าจะเป็นของการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่
ถูกปรับ แสดงได้ดังนี้

$$P_X(t) = \frac{\theta(1-e^{-p^2})}{(1+\theta-t)} + \frac{6\theta e^{-p^2}}{(1+2\theta-t)} - \frac{6\theta e^{-p^2}}{(1+3\theta-t)} \quad (4.16)$$

โมเมนต์รอบจุดกำเนิด

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ โมเมนต์ที่
 r รอบจุดศูนย์กลางหรือรอบจุดกำเนิดของสำหรับ $X \sim PACRTED(\theta, p)$ หาได้โดยใช้ความสัมพันธ์
ระหว่างโมเมนต์ที่ r รอบจุดกำเนิดกับฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ แสดงดังนี้

$$E(X^r) = \frac{\partial^r M_X(t)}{\partial t^r} \Big|_{t=0}; r = 1, 2, \dots \quad (4.17)$$

โมเมนต์ที่ 1 รอบจุดศูนย์กลาง $r = 1$ แสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
E(X) &= M'_X(t) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\theta(1-e^{-p^2})}{(1+\theta-e^t)} + \frac{6\theta e^{-p^2}}{(1+2\theta-e^t)} - \frac{6\theta e^{-p^2}}{(1+3\theta-e^t)} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left[\theta(1-e^{-p^2})(1+\theta-e^t)^{-1} + 6\theta e^{-p^2}(1+2\theta-e^t)^{-1} \right. \\
&\quad \left. - 6\theta e^{-p^2}(1+3\theta-e^t)^{-1} \right] \\
&= \theta(1-e^{-p^2}) \frac{e^t}{(1+\theta-e^t)^2} + 6\theta e^{-p^2} \frac{e^t}{(1+2\theta-e^t)^2} - 6\theta e^{-p^2} \frac{e^t}{(1+3\theta-e^t)^2}
\end{aligned}$$

แทนค่า $t = 0$; จะได้

$$\begin{aligned}
&= \frac{\theta(1-e^{-p^2})}{\theta^2} + \frac{6\theta e^{-p^2}}{(2\theta)^2} - \frac{6\theta e^{-p^2}}{(3\theta)^2} \\
E(X) &= \frac{6-e^{-p^2}}{6\theta} \quad (4.18)
\end{aligned}$$

โมเมนต์ที่ 2 รอบจุดศูนย์กลาง $r = 2$ แสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= M_X''(t)|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left[\theta(1 - e^{-p^2}) \frac{e^t}{(1 + \theta - e^t)^2} + 6\theta e^{-p^2} \frac{e^t}{(1 + 2\theta - e^t)^2} \right. \\
&\quad \left. - 6\theta e^{-p^2} \frac{e^t}{(1 + 3\theta - e^t)^2} \right] \\
&= \theta(1 - e^{-p^2}) \left(\frac{(1 + \theta - e^t)^2 e^t - e^t(-2e^t(1 + \theta - e^t))}{(1 + \theta - e^t)^4} \right) \\
&\quad + 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{(1 + 2\theta - e^t)^2 e^t - e^t(-2e^t(1 + 2\theta - e^t))}{(1 + 2\theta - e^t)^4} \right) \\
&\quad - 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{(1 + 3\theta - e^t)^2 e^t - e^t(-2e^t(1 + 3\theta - e^t))}{(1 + 3\theta - e^t)^4} \right) \\
&= \theta(1 - e^{-p^2}) \left(\frac{e^t}{(1 + \theta - e^t)^2} + \frac{2e^{2t}}{(1 + \theta - e^t)^3} \right) \\
&\quad + 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{e^t}{(1 + 2\theta - e^t)^2} + \frac{2e^{2t}}{(1 + 2\theta - e^t)^3} \right) \\
&\quad - 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{e^t}{(1 + 3\theta - e^t)^2} + \frac{2e^{2t}}{(1 + 3\theta - e^t)^3} \right)
\end{aligned}$$

แทนค่า $t = 0$; จะได้

$$\begin{aligned}
&= \theta(1 - e^{-p^2}) \left(\frac{1}{(\theta)^2} + \frac{2}{(\theta)^3} \right) + 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{1}{(2\theta)^2} + \frac{2}{(2\theta)^3} \right) \\
&\quad - 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{1}{(3\theta)^2} + \frac{2}{(3\theta)^3} \right) \\
&= (1 - e^{-p^2}) \left(\frac{\theta + 2}{\theta^2} \right) + 6e^{-p^2} \left(\frac{2\theta + 2}{8\theta^2} \right) - 6e^{-p^2} \left(\frac{3\theta + 2}{27\theta^2} \right) \\
E(X^2) &= \frac{36 - 17e^{-p^2} - 3\theta e^{-p^2} + 18\theta}{18\theta^2} \tag{4.19}
\end{aligned}$$

โมเมนต์ที่ 3 รอบจุดศูนย์กลาง $r = 3$ แสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
E(X^3) &= M_X'''(t)|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left[\theta(1 - e^{-p^2}) \left(\frac{e^t}{(1 + \theta - e^t)^2} + \frac{2e^{2t}}{(1 + \theta - e^t)^3} \right) \right. \\
&\quad + 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{e^t}{(1 + 2\theta - e^t)^2} + \frac{2e^{2t}}{(1 + 2\theta - e^t)^3} \right) \\
&\quad \left. - 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{e^t}{(1 + 3\theta - e^t)^2} + \frac{2e^{2t}}{(1 + 3\theta - e^t)^3} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \theta(1 - e^{-p^2}) \left(\frac{(1 + \theta - e^t)^2 e^t - e^t(-2e^t(1 + \theta - e^t))}{(1 + \theta - e^t)^4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1 + \theta - e^t)^3 4e^{2t} - 2e^{2t}(-3e^t(1 + \theta - e^t)^2)}{(1 + \theta - e^t)^6} \right) \\
&\quad + 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{(1 + 2\theta - e^t)^2 e^t - e^t(-2e^t(1 + 2\theta - e^t))}{(1 + 2\theta - e^t)^4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1 + 2\theta - e^t)^3 4e^{2t} - 2e^{2t}(-3e^t(1 + 2\theta - e^t)^2)}{(1 + 2\theta - e^t)^6} \right) \\
&\quad - 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{(1 + 3\theta - e^t)^2 e^t - e^t(-2e^t(1 + 3\theta - e^t)^2)}{(1 + 3\theta - e^t)^4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1 + 3\theta - e^t)^3 4e^{2t} - 2e^{2t}(-3e^t(1 + 3\theta - e^t)^2)}{(1 + 3\theta - e^t)^6} \right) \\
&= \theta(1 - e^{-p^2}) \left(\frac{(1 + \theta - e^t)^2 e^t + 2e^{2t}(1 + \theta - e^t)}{(1 + \theta - e^t)^4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1 + \theta - e^t)^3 4e^{2t} + 6e^{3t}(1 + \theta - e^t)^2}{(1 + \theta - e^t)^6} \right) \\
&\quad + 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{(1 + 2\theta - e^t)^2 e^t + 2e^{2t}(1 + 2\theta - e^t)}{(1 + 2\theta - e^t)^4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1 + 2\theta - e^t)^3 4e^{2t} + 6e^{3t}(1 + 2\theta - e^t)^2}{(1 + 2\theta - e^t)^6} \right) \\
&\quad - 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{(1 + 3\theta - e^t)^2 e^t + 2e^{2t}(1 + 3\theta - e^t)^2}{(1 + 3\theta - e^t)^4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1 + 3\theta - e^t)^3 4e^{2t} + 6e^{3t}(1 + 3\theta - e^t)^2}{(1 + 3\theta - e^t)^6} \right) \\
&= \theta(1 - e^{-p^2}) \left(\frac{e^t}{(1 + \theta - e^t)^2} + \frac{2e^{2t}}{(1 + \theta - e^t)^3} + \frac{4e^{2t}}{(1 + \theta - e^t)^3} + \frac{6e^{3t}}{(1 + \theta - e^t)^4} \right) \\
&\quad + 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{e^t}{(1 + 2\theta - e^t)^2} + \frac{2e^{2t}}{(1 + 2\theta - e^t)^3} + \frac{4e^{2t}}{(1 + 2\theta - e^t)^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{6e^{3t}}{(1 + 2\theta - e^t)^4} \right) \\
&\quad - 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{e^t}{(1 + 3\theta - e^t)^2} + \frac{2e^{2t}}{(1 + 3\theta - e^t)^3} + \frac{4e^{2t}}{(1 + 3\theta - e^t)^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{6e^{3t}}{(1 + 3\theta - e^t)^4} \right) \\
&= \theta(1 - e^{-p^2}) \left(\frac{e^t}{(1 + \theta - e^t)^2} + \frac{6e^{2t}}{(1 + \theta - e^t)^3} + \frac{6e^{3t}}{(1 + \theta - e^t)^4} \right) \\
&\quad + 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{e^t}{(1 + 2\theta - e^t)^2} + \frac{6e^{2t}}{(1 + 2\theta - e^t)^3} + \frac{6e^{3t}}{(1 + 2\theta - e^t)^4} \right) \\
&\quad - 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{e^t}{(1 + 3\theta - e^t)^2} + \frac{6e^{2t}}{(1 + 3\theta - e^t)^3} + \frac{6e^{3t}}{(1 + 3\theta - e^t)^4} \right)
\end{aligned}$$

แทนค่า $t = 0$; จะได้

$$\begin{aligned}
 &= \theta(1 - e^{-p^2}) \left(\frac{1}{(\theta)^2} + \frac{6}{(\theta)^3} + \frac{6}{(\theta)^4} \right) + 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{1}{(2\theta)^2} + \frac{6}{(2\theta)^3} + \frac{6}{(2\theta)^4} \right) \\
 &\quad - 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{1}{(3\theta)^2} + \frac{6}{(3\theta)^3} + \frac{6}{(3\theta)^4} \right) \\
 &= (1 - e^{-p^2}) \left(\frac{\theta^2 + 6\theta + 6}{\theta^3} \right) + 6e^{-p^2} \left(\frac{2\theta^2 + 6\theta + 3}{8\theta^3} \right) - 6e^{-p^2} \left(\frac{3\theta^2 + 6\theta + 2}{27\theta^3} \right) \\
 &= \frac{(1 - e^{-p^2})(216\theta^2 + 1296\theta + 1296) + 6e^{-p^2}(54\theta^2 + 162\theta + 81) - 6e^{-p^2}(24\theta^2 + 48\theta + 16)}{216\theta^3} \\
 &= \frac{216\theta^2 + 1296\theta + 1296 - 36\theta^2 e^{-p^2} - 612\theta e^{-p^2} - 906e^{-p^2}}{216\theta^3} \\
 E(X^3) &= \frac{216 - 151e^{-p^2} - 6\theta^2 e^{-p^2} + 36\theta^2 - 102\theta e^{-p^2} + 216\theta}{36\theta^3} \tag{4.20}
 \end{aligned}$$

โมเมนต์ที่ 4 รอบจุดศูนย์กลาง $r = 4$ แสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 E(X^4) &= M_X''''(t)|_{t=0} \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\theta(1 - e^{-p^2}) \left(\frac{e^t}{(1 + \theta - e^t)^2} + \frac{6e^{2t}}{(1 + \theta - e^t)^3} + \frac{6e^{3t}}{(1 + \theta - e^t)^4} \right) \right. \\
 &\quad + 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{e^t}{(1 + 2\theta - e^t)^2} + \frac{6e^{2t}}{(1 + 2\theta - e^t)^3} + \frac{6e^{3t}}{(1 + 2\theta - e^t)^4} \right) \\
 &\quad \left. - 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{e^t}{(1 + 3\theta - e^t)^2} + \frac{6e^{2t}}{(1 + 3\theta - e^t)^3} + \frac{6e^{3t}}{(1 + 3\theta - e^t)^4} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \theta(1 - e^{-p^2}) \left(\frac{(1 + \theta - e^t)^2 e^t - e^t(-2e^t(1 + \theta - e^t))}{(1 + \theta - e^t)^4} \right. \\
&\quad + \frac{(1 + \theta - e^t)^3 12e^{2t} - 6e^{2t}(-3e^t(1 + \theta - e^t)^2)}{(1 + \theta - e^t)^6} \\
&\quad + \left. \frac{(1 + \theta - e^t)^4 18e^{3t} - 6e^{3t}(-4e^t(1 + \theta - e^t)^3)}{(1 + \theta - e^t)^8} \right) \\
&\quad + 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{(1 + 2\theta - e^t)^2 e^t - e^t(-2e^t(1 + 2\theta - e^t))}{(1 + 2\theta - e^t)^4} \right. \\
&\quad + \frac{(1 + 2\theta - e^t)^3 12e^{2t} - 6e^{2t}(-3e^t(1 + 2\theta - e^t)^2)}{(1 + 2\theta - e^t)^6} \\
&\quad + \left. \frac{(1 + 2\theta - e^t)^4 18e^{3t} - 6e^{3t}(-4e^t(1 + 2\theta - e^t)^3)}{(1 + 2\theta - e^t)^8} \right) \\
&\quad - 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{(1 + 3\theta - e^t)^2 e^t - e^t(-2e^t(1 + 3\theta - e^t))}{(1 + 3\theta - e^t)^4} \right. \\
&\quad + \frac{(1 + 3\theta - e^t)^3 12e^{2t} - 6e^{2t}(-3e^t(1 + 3\theta - e^t)^2)}{(1 + 3\theta - e^t)^6} \\
&\quad + \left. \frac{(1 + 3\theta - e^t)^4 18e^{3t} - 6e^{3t}(-4e^t(1 + 3\theta - e^t)^3)}{(1 + 3\theta - e^t)^8} \right) \\
&= \theta(1 - e^{-p^2}) \left(\frac{(1 + \theta - e^t)^2 e^t + 2e^{2t}(1 + \theta - e^t)}{(1 + \theta - e^t)^4} \right. \\
&\quad + \frac{(1 + \theta - e^t)^3 12e^{2t} + 18e^{3t}(1 + \theta - e^t)^2}{(1 + \theta - e^t)^6} \\
&\quad + \left. \frac{(1 + \theta - e^t)^4 18e^{3t} + 24e^{4t}(1 + \theta - e^t)^3}{(1 + \theta - e^t)^8} \right) \\
&\quad + 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{(1 + 2\theta - e^t)^2 e^t + 2e^{2t}(1 + 2\theta - e^t)}{(1 + 2\theta - e^t)^4} \right. \\
&\quad + \frac{(1 + 2\theta - e^t)^3 12e^{2t} + 18e^{3t}(1 + 2\theta - e^t)^2}{(1 + 2\theta - e^t)^6} \\
&\quad + \left. \frac{(1 + 2\theta - e^t)^4 18e^{3t} + 24e^{4t}(1 + 2\theta - e^t)^3}{(1 + 2\theta - e^t)^8} \right) \\
&\quad - 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{(1 + 3\theta - e^t)^2 e^t + 2e^{2t}(1 + 3\theta - e^t)}{(1 + 3\theta - e^t)^4} \right. \\
&\quad + \frac{(1 + 3\theta - e^t)^3 12e^{2t} + 18e^{3t}(1 + 3\theta - e^t)^2}{(1 + 3\theta - e^t)^6} \\
&\quad + \left. \frac{(1 + 3\theta - e^t)^4 18e^{3t} + 24e^{4t}(1 + 3\theta - e^t)^3}{(1 + 3\theta - e^t)^8} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \theta(1 - e^{-p^2}) \left(\frac{e^t}{(1 + \theta - e^t)^2} + \frac{2e^{2t}}{(1 + \theta - e^t)^3} + \frac{12e^{2t}}{(1 + \theta - e^t)^3} + \frac{18e^{3t}}{(1 + \theta - e^t)^4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{18e^{3t}}{(1 + \theta - e^t)^4} + \frac{24e^{4t}}{(1 + \theta - e^t)^5} \right) \\
&\quad + 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{e^t}{(1 + 2\theta - e^t)^2} + \frac{2e^{2t}}{(1 + 2\theta - e^t)^3} + \frac{12e^{2t}}{(1 + 2\theta - e^t)^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{18e^{3t}}{(1 + 2\theta - e^t)^4} + \frac{18e^{3t}}{(1 + 2\theta - e^t)^4} + \frac{24e^{4t}}{(1 + 2\theta - e^t)^5} \right) \\
&\quad - 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{e^t}{(1 + 3\theta - e^t)^2} + \frac{2e^{2t}}{(1 + 3\theta - e^t)^3} + \frac{12e^{2t}}{(1 + 3\theta - e^t)^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{18e^{3t}}{(1 + 3\theta - e^t)^4} + \frac{18e^{3t}}{(1 + 3\theta - e^t)^4} + \frac{24e^{4t}}{(1 + 3\theta - e^t)^5} \right)
\end{aligned}$$

แทนค่า $t = 0$; จะได้

$$\begin{aligned}
&= \theta(1 - e^{-p^2}) \left(\frac{1}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3} + \frac{12}{\theta^3} + \frac{18}{\theta^4} + \frac{18}{\theta^4} + \frac{24}{\theta^5} \right) \\
&\quad + 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{1}{4\theta^2} + \frac{2}{8\theta^3} + \frac{12}{8\theta^3} + \frac{18}{16\theta^4} + \frac{18}{16\theta^4} + \frac{24}{32\theta^5} \right) \\
&\quad - 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{1}{9\theta^2} + \frac{2}{27\theta^3} + \frac{12}{27\theta^3} + \frac{18}{81\theta^4} + \frac{18}{81\theta^4} + \frac{24}{243\theta^5} \right) \\
&= \theta(1 - e^{-p^2}) \left(\frac{1}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3} + \frac{12}{\theta^3} + \frac{18}{\theta^4} + \frac{18}{\theta^4} + \frac{24}{\theta^5} \right) \\
&\quad + 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{1}{4\theta^2} + \frac{2}{8\theta^3} + \frac{12}{8\theta^3} + \frac{18}{16\theta^4} + \frac{18}{16\theta^4} + \frac{24}{32\theta^5} \right) \\
&\quad - 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{1}{9\theta^2} + \frac{2}{27\theta^3} + \frac{12}{27\theta^3} + \frac{18}{81\theta^4} + \frac{18}{81\theta^4} + \frac{24}{243\theta^5} \right) \\
&= \theta(1 - e^{-p^2}) \left(\frac{1}{\theta^2} + \frac{14}{\theta^3} + \frac{36}{\theta^4} + \frac{24}{\theta^5} \right) + 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{1}{4\theta^2} + \frac{14}{8\theta^3} + \frac{36}{16\theta^4} + \frac{24}{32\theta^5} \right) \\
&\quad - 6\theta e^{-p^2} \left(\frac{1}{9\theta^2} + \frac{14}{27\theta^3} + \frac{36}{81\theta^4} + \frac{24}{243\theta^5} \right) \\
&= (1 - e^{-p^2}) \left(\frac{\theta^3 + 14\theta^2 + 36\theta + 24}{\theta^4} \right) + 3e^{-p^2} \left(\frac{8\theta^3 + 56\theta^2 + 72\theta + 24}{16\theta^4} \right) \\
&\quad - 2e^{-p^2} \left(\frac{27\theta^3 + 126\theta^2 + 108\theta + 24}{81\theta^4} \right) \\
&= \frac{(1 - e^{-p^2})(108\theta^3 + 1512\theta^2 + 3888\theta + 2592) + 3e^{-p^2}(54\theta^3 + 378\theta^2 + 486\theta + 162) - 2e^{-p^2}(36\theta^3 + 168\theta^2 + 144\theta + 32)}{108\theta^4} \\
&= \frac{108\theta^3 + 1512\theta^2 + 3888\theta + 2592 - 18\theta^3 e^{-p^2} - 714\theta^2 e^{-p^2} - 2718\theta e^{-p^2} - 2170e^{-p^2}}{108\theta^4}
\end{aligned}$$

$$E(X^4) = \frac{1296 - 9\theta^3 e^{-p^2} - 357\theta^2 e^{-p^2} + 54\theta^3 - 1359\theta e^{-p^2} + 756\theta^2 - 1085e^{-p^2} + 1944\theta}{54\theta^4}$$

4.1.2 ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสำหรับข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทน

ผู้วิจัยจึงนำเสนอวิธีในการสร้างฟังก์ชันการแจกแจงของมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนโดยการผสมการแจกแจงแกมมาเข้ากับการแจกแจงเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (NTWED) และผสมการแจกแจงแกมมาเข้ากับการแจกแจงเลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (ACRTED) ดังต่อไปนี้

การแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (GNTWED)

สมมติให้จำนวนเงินหรือมูลค่าของการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนมีการแจกแจงแบบแกมมา และ ให้ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่แสดงถึงมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนของผู้ถือกรมธรรม์แต่ละคน ดังนั้น ฟังก์ชันการแจกแจงความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม Y โดยมีพารามิเตอร์ γ และ θ แสดงได้ดังนี้

$$f(y|\gamma, \theta) = \frac{\theta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} y^{\gamma-1} e^{-\theta y} ; \gamma, \theta > 0, y > 0 \quad (4.21)$$

และค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม Y มีค่าเท่ากับ $E[Y|\gamma, \theta] = \frac{\gamma}{\theta}$

เนื่องจากค่าพารามิเตอร์ γ มีค่าแตกต่างกันไปตามแต่ละผู้ถือกรมธรรม์ จะสมมติให้ θ เป็นตัวแปรสุ่ม และสมมติให้ตัวแปรสุ่มของพารามิเตอร์ θ มีการแจกแจงเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก โดยมีพารามิเตอร์ τ และ ϵ ฟังก์ชันการแจกแจงความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม θ แสดงได้ดังนี้

$$g(\theta) = \frac{\tau(\epsilon + 1)^2}{\epsilon^2} e^{-\tau\theta} (1 - (1 + \tau\epsilon\theta)e^{-\tau\epsilon\theta}) ; \tau, \epsilon > 0, \theta > 0 \quad (4.22)$$

และค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม θ คือ $E[\theta] = \frac{\tau(\epsilon+1)^2}{\epsilon^2} \left(\frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{(\tau+\tau\epsilon)^2} - \frac{2}{(\tau+\tau\epsilon)^3} \right)$

ผู้วิจัยได้สร้างการแจกแจงที่เกิดจากการผสมการแจกแจงแกมมาเข้ากับการแจกแจงเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก โดยมีขั้นตอนดังนี้

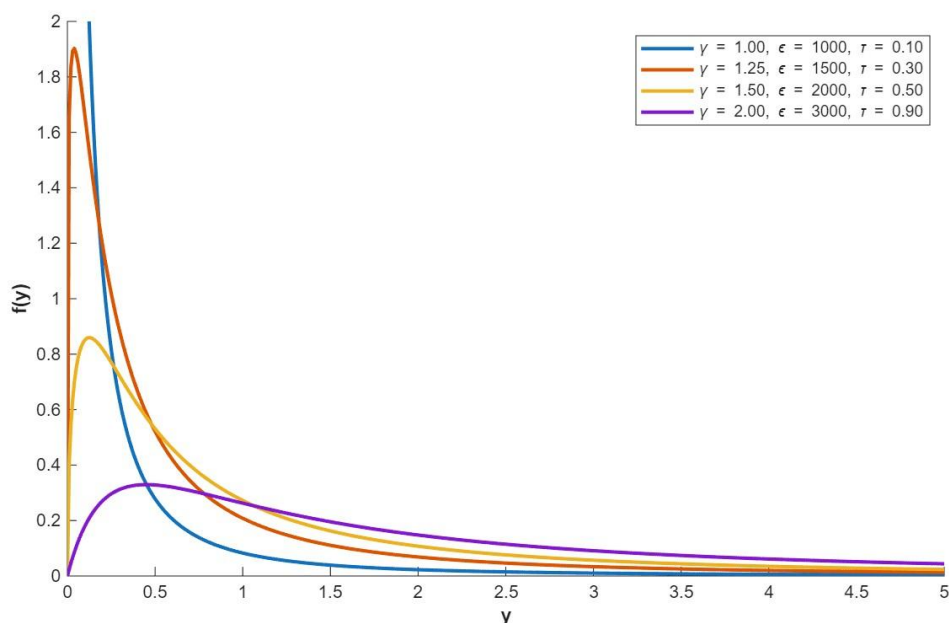
$$\begin{aligned} f(y) &= \int_0^\infty f(y|\gamma, \theta) g(\theta) d\theta \\ &= \int_0^\infty \frac{\theta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} y^{\gamma-1} e^{-\theta y} \cdot \frac{\tau(\epsilon + 1)^2}{\epsilon^2} e^{-\tau\theta} (1 - (1 + \tau\epsilon\theta)e^{-\tau\epsilon\theta}) d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{y^{\gamma-1}\tau(\epsilon+1)^2}{\epsilon^2\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \theta^\gamma e^{-\theta(y+\tau)} (1 - (1+\tau\epsilon\theta)e^{-\tau\epsilon\theta}) d\theta \\
&= \frac{y^{\gamma-1}\tau(\epsilon+1)^2}{\epsilon^2\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \theta^\gamma e^{-\theta(y+\tau)} - \theta^\gamma (1+\tau\gamma\theta) e^{-\theta(y+\tau+\tau\epsilon)} d\theta \\
&= \frac{y^{\gamma-1}\tau(\epsilon+1)^2}{\epsilon^2\Gamma(\gamma)} \left(\int_0^\infty \theta^\gamma e^{-\theta(y+\tau)} d\theta - \int_0^\infty \theta^\gamma e^{-\theta(y+\tau+\tau\epsilon)} d\theta \right. \\
&\quad \left. - \tau\gamma \int_0^\infty \theta^{\gamma+1} e^{-\theta(y+\tau+\tau\epsilon)} d\theta \right) \\
&= \frac{y^{\gamma-1}\tau(\epsilon+1)^2}{\epsilon^2\Gamma(\gamma)} \left(\int_0^\infty \left(\frac{u}{(y+\tau)} \right)^\gamma e^{-u} \frac{du}{(y+\tau)} \right. \\
&\quad \left. - \int_0^\infty \left(\frac{u}{(y+\tau+\tau\epsilon)} \right)^\gamma e^{-u} \frac{du}{(y+\tau+\tau\epsilon)} \right. \\
&\quad \left. - \tau\epsilon \int_0^\infty \left(\frac{u}{(y+\tau+\tau\epsilon)} \right)^{\gamma+1} e^{-u} \frac{du}{(y+\tau+\tau\epsilon)} \right) \\
&= \frac{y^{\gamma-1}\tau(\epsilon+1)^2}{\epsilon^2\Gamma(\gamma)} \left(\frac{\Gamma(\gamma+1)}{(y+\tau)^{\gamma+1}} - \frac{\Gamma(\gamma+1)}{(y+\tau+\tau\epsilon)^{\gamma+1}} - \frac{\tau\epsilon\Gamma(\gamma+2)}{(y+\tau+\tau\epsilon)^{\gamma+2}} \right)
\end{aligned}$$

ผลลัพธ์ที่ได้จากการผสมการแจกแจงมีชื่อเรียกว่า การแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (Gamma New Two Weighted Exponential Distribution: GNTWED) โดยแสดงฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นได้ดังนี้

$$f(y; \gamma, \tau, \epsilon) = \frac{y^{\gamma-1}\tau\epsilon(\epsilon+1)^2}{\epsilon^2} \left(\frac{1}{(y+\tau)^{\gamma+1}} - \frac{1}{(y+\tau+\tau\epsilon)^{\gamma+1}} - \frac{\tau\epsilon(\gamma+1)}{(y+\tau+\tau\epsilon)^{\gamma+2}} \right) \quad (4.23)$$

โดยที่ $\gamma, \tau, \epsilon > 0$ และ $y = 0, 1, 2, \dots$



ภาพที่ 7 รูปร่างฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจง GNTWED ที่ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ

เนื่องจากฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (GNTWED) ดังสมการที่ 4.23 มีรูปแบบฟังก์ชันที่ซับซ้อน ส่งผลให้การหาคุณสมบัติของการแจกแจงดังกล่าว เช่น ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (Moment Generating Function ; MGF) ฟังก์ชันก่อกำเนิดความน่าจะเป็น (Probability Generating Function ; PGF) และโมเมนต์รอบจุดกำเนิด (Moment r^{th} about origin) ไม่สามารถหาปริพันธ์ได้ จึงไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบปิด (Closed form) ได้

การแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (GACRTED)

สมมติให้จำนวนเงินหรือมูลค่าของการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนมีการแจกแจงแบบแกมมา และ ให้ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่แสดงถึงมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้ถือกรมธรรม์แต่ละคน ดังนั้น ฟังก์ชันการแจกแจงความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม Y โดยมีพารามิเตอร์ γ และ θ แสดงได้ดังนี้

$$f(y|\gamma, \theta) = \frac{\theta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} y^{\gamma-1} e^{-\theta y}; \gamma, \theta > 0, y > 0 \quad (4.24)$$

และค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม Y มีค่าเท่ากับ $E[Y|\gamma, \theta] = \frac{\gamma}{\theta}$

เนื่องจากค่าพารามิเตอร์ γ มีค่าแตกต่างกันไปตามแต่ละผู้ถือกรรมธรรม์ จะสมมติให้ Θ เป็นตัวแปรสุ่ม และสมมติให้ตัวแปรสุ่มของพารามิเตอร์ Θ มีการแจกแจงเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก โดยมีพารามิเตอร์ δ และ q ฟังก์ชันการแจกแจงความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม Θ แสดงได้ดังนี้

$$g(\theta) = \delta e^{-\delta\theta} (1 - e^{-q^2} + 6e^{-q^2-\delta\theta} - 6e^{-q^2-2\delta\theta}) ; \delta > 0, q \in \mathbb{R} \quad (4.25)$$

และค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม Θ คือ $E[\Theta] = \frac{1-e^{-q^2} + \frac{3e^{-q^2}}{2} - \frac{2e^{-q^2}}{3}}{\delta}$

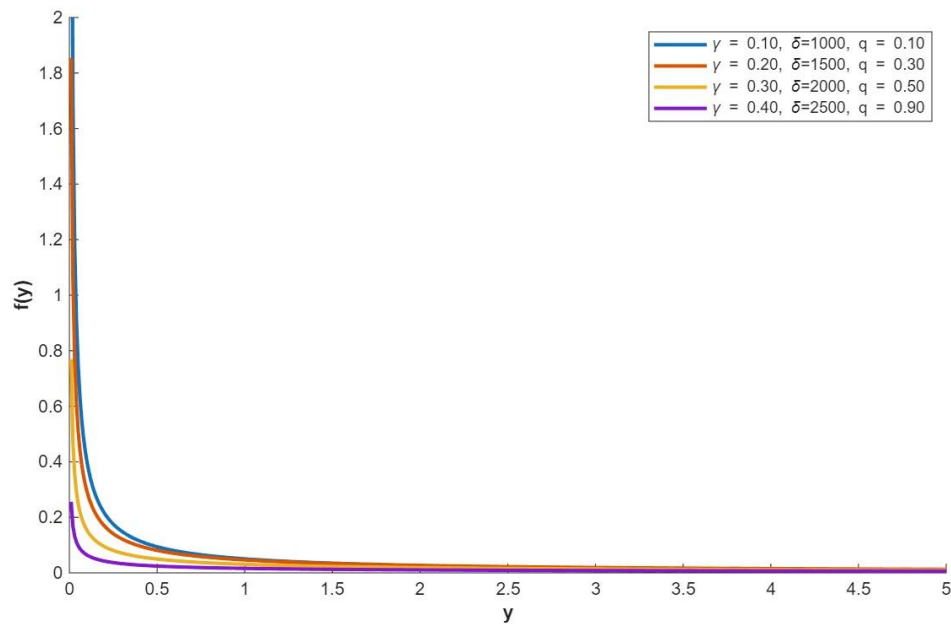
ผู้วิจัยได้ทำการสร้างฟังก์ชันการแจกแจงโดยการผสมการแจกแจงปัวซองเข้ากับการแจกแจงเลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (PACRTED) โดยมีขั้นตอนดังนี้

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_0^\infty f(y|\gamma, \theta) g(\theta) d\theta \\ &= \int_0^\infty \frac{\theta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} y^{\gamma-1} e^{-\theta y} \cdot \delta e^{-\delta\theta} (1 - e^{-q^2} + 6e^{-q^2-\delta\theta} - 6e^{-q^2-2\delta\theta}) d\theta \\ &= \frac{\delta y^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \theta^\gamma e^{-\theta(y+\delta)} (1 - e^{-q^2} + 6e^{-q^2-\delta\theta} - 6e^{-q^2-2\delta\theta}) d\theta \\ &= \frac{\delta y^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \theta^\gamma e^{-\theta(y+\delta)} d\theta - e^{-q^2} \int_0^\infty \theta^\gamma e^{-\theta(y+\delta)} d\theta \\ &\quad + 6e^{-q^2+\delta\theta} \int_0^\infty \theta^\gamma e^{-\theta(y+2\delta)} d\theta - 6e^{-q^2+\delta\theta} \int_0^\infty \theta^\gamma e^{-\theta(y+3\delta)} d\theta \\ &= \frac{\delta y^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left(\int_0^\infty \left(\frac{u}{(y+\delta)} \right)^\gamma e^{-u} \frac{du}{(y+\delta)} - e^{-q^2} \int_0^\infty \left(\frac{u}{(y+\delta)} \right)^\gamma e^{-u} \frac{du}{(y+\delta)} \right. \\ &\quad \left. + 6e^{-q^2} \int_0^\infty \left(\frac{u}{(y+2\delta)} \right)^\gamma e^{-u} \frac{du}{(y+2\delta)} - 6e^{-q^2} \int_0^\infty \left(\frac{u}{(y+3\delta)} \right)^\gamma e^{-u} \frac{du}{(y+3\delta)} \right) \\ &= \frac{\delta y^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{\Gamma(\gamma+1)}{(y+\delta)^{\gamma+1}} - \frac{e^{-q^2} \Gamma(\gamma+1)}{(y+\delta)^{\gamma+1}} + \frac{6e^{-q^2} \Gamma(\gamma+1)}{(y+2\delta)^{\gamma+1}} - \frac{6e^{-q^2} \Gamma(\gamma+1)}{(y+3\delta)^{\gamma+1}} \right) \end{aligned}$$

ผลลัพธ์ที่ได้จากการผสมการแจกแจงมีชื่อเรียกว่า การแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (Gamma Adaptive cubic rank transmuted Exponential Distribution: GACRTED) โดยแสดงฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นได้ดังนี้

$$f(y; \gamma, \delta, q) = \delta \gamma y^{\gamma-1} \left(\frac{1 - e^{-q^2}}{(y + \delta)^{\gamma+1}} + \frac{6e^{-q^2}}{(y + 2\delta)^{\gamma+1}} - \frac{6e^{-q^2}}{(y + 3\delta)^{\gamma+1}} \right) \quad (4.26)$$

โดยที่ $\gamma, \delta > 0, q \in \mathbb{R}$ และ $y = 0, 1, 2, \dots$



ภาพที่ 8 รูปร่างฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจง GACRTED ที่ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ

เนื่องจากฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจงเกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (GACRTED) ดังสมการที่ 4.26 มีรูปแบบฟังก์ชันที่ซับซ้อน ส่งผลให้การหาคุณสมบัติของการแจกแจงดังกล่าว เช่น ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (Moment Generating Function ; MGF) ฟังก์ชันก่อกำเนิดความน่าจะเป็น (Probability Generating Function ; PGF) และโมเมนต์รอบจุดกำเนิด (Moment r^{th} about origin) ไม่สามารถหาปริพันธ์ได้ จึงไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบปิด (Closed form) ได้

4.1.3 การวัดความเหมาะสมของตัวแบบสำหรับข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

ในการศึกษาครั้งนี้ได้ใช้การแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (PNTWED) และการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (PACRTED) เพื่อทำการวิเคราะห์การแจกแจงของจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนจากข้อมูลทั้ง 3 ชุด

ข้อมูล โดยที่พารามิเตอร์ของการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (PNTWED) ประมาณด้วยวิธี MLE ในทำนองเดียวกันพารามิเตอร์ของการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (PACRTED) ได้ประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีเดียวกัน หลังจากนั้นได้ทำการตรวจสอบความเหมาะสมของการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (PNTWED) และการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (GACRTED) กับข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนทั้ง 3 ชุดข้อมูลโดยใช้การทดสอบไคกำลังสองภาวะสารูปดี นอกจากนี้ได้ทำการเปรียบเทียบจำนวนครั้งในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนที่อธิบายด้วย 2 การแจกแจงข้างต้น กับการแจกแจงแบบอื่น ๆ ได้แก่ การแจกแจงปัวซอง, การแจกแจงปัวซอง-ลินด์ลีย์ 1 พารามิเตอร์ และการแจกแจงปัวซอง-ลินด์ลีย์ 2 พารามิเตอร์ ซึ่งได้แสดงฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น และฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงต่าง ๆ ไว้ดังตารางที่ 2 และผลการวิเคราะห์แสดงดังตารางที่ 3-5 ตามลำดับ

สมมติฐาน

H_0 : การแจกแจงของข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนมีลักษณะการแจกแจงเป็นไปตามที่คาดไว้

H_1 : การแจกแจงของข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนไม่ได้มีลักษณะการแจกแจงเป็นไปตามที่คาดไว้

ตารางที่ 2 ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น (PMF) และฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (CDF) ของการแจกแจงจำนวนครั้งในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทน

การแจกแจงปัวซอง	PMF : $f(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}; \lambda > 0, x = 0, 1, 2, \dots$
การแจกแจงปัวซอง-ลินด์ลีย์ 1 พารามิเตอร์	PMF : $f(x; \theta) = \frac{\theta^2(x + \theta + 2)}{(\theta + 1)^{x+3}}; \theta > 0, x = 0, 1, 2, \dots$
การแจกแจงปัวซอง-ลินด์ลีย์ 2 พารามิเตอร์	PMF : $f(x; \alpha, \theta) = \frac{\theta^2(x + \alpha + \alpha\theta + 1)}{(\alpha\theta + 1)(\theta + 1)^{x+2}}; \alpha, \theta > 0, x = 0, 1, 2, \dots$

การแจกแจงปัวซอง- เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบ ถ่วงน้ำหนัก	PMF :	$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\alpha(\beta + 1)^2}{\beta^2 \Gamma(x + 1)} \left(\frac{\Gamma(x + 1)}{(1 + \alpha)^{x+1}} - \frac{\Gamma(x + 1)}{(1 + \alpha + \alpha\beta)^{x+1}} - \frac{\alpha\beta \Gamma(x + 2)}{(1 + \alpha + \alpha\beta)^{x+2}} \right); \alpha, \beta > 0, x = 0, 1, 2, \dots$
--	-------	--

การแจกแจงปัวซอง- เลขชี้กำลังแบบ แปลงอันดับกำลัง สามที่ถูกปรับ	PMF :	$f(x; \theta, p) = \frac{\theta(1 - e^{-p^2})}{(1 + \theta)^{x+1}} + \frac{6e^{-p^2}\theta}{(1 + 2\theta)^{x+1}} - \frac{6e^{-p^2}\theta}{(1 + 3\theta)^{x+1}}$ $; \theta > 0, p \in \mathbb{R}, x = 0, 1, 2, \dots$
--	-------	---

ตารางที่ 3 ความเหมาะสมของการแจกแจงความน่าจะเป็นทั้ง 5 การแจกแจง ในการอธิบายข้อมูล
จำนวนครั้งในการเรียกร่องค่าสินไหมทดแทนชุดที่ 1 โดยสถิติทดสอบไคกำลังสอง

จำนวน ครั้งในการ เรียกร่อง ค่าสินไหม ทดแทน	ความถี่ ของ จำนวน ครั้งในการ เรียกร่อง ค่าสินไหม ทดแทน	ความถี่คาดหวัง				
		ปัวซอง	ปัวซอง-ลินด์ลีย์ 1 พารามิเตอร์	ปัวซอง-ลินด์ลีย์ 2 พารามิเตอร์	ปัวซอง-เลขชี้ กำลัง 2 พารามิเตอร์ แบบถ่วง น้ำหนัก	ปัวซอง-เลขชี้ กำลังแบบ แปลงอันดับ กำลังสามที่ถูก ปรับ
0	15943	15909.08	15950.64	15951.05	15943.43	15950.94
1	1126	1188.41	1109.70	1109.08	1123.36	1109.17
2	68	44.39	76.94	77.11	71.40	77.13
3	5	1.11	5.32	5.36	4.50	5.36
4	1	0.02	0.39	0.40	0.30	0.40
รวม ทั้งหมด	17143	17143	17143	17143	17143	17143
ค่าประมาณ พารามิเตอร์		$\hat{\lambda} = 0.0728$	$\hat{\theta} = 14.2579$	$\hat{\alpha} = 18.3354$ $\hat{\delta} = 13.4364$	$\hat{\alpha} = 14.8830$ $\hat{\beta} = 16.8527$	$\hat{\theta} = 13.3810$ $\hat{p} = 8.9586$
χ^2		37.0036	1.2971	1.3491	0.4625	1.3492
DF.		2	2	1	1	1
p-value		< 0.01	0.5228	0.2454	0.4964	0.2454
AIC		9328.24	9303.10	9305.12	9304.29	9305.12

BIC	9335.10	9310.82	9320.62	9319.79	9320.62
-----	---------	---------	---------	---------	---------

หมายเหตุ: ทำการยุบกลุ่มเมื่อค่าความถี่คาดหวังมีค่า < 1

จากตารางที่ 3 พบว่าการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนักมีค่าสถิติไคกำลังสองต่ำที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับ การแจกแจงอื่น ได้แก่ การแจกแจงปัวซอง การแจกแจงปัวซอง-ลันด์ลีย์ 1 พารามิเตอร์ การแจกแจงปัวซอง-ลันด์ลีย์ 2 พารามิเตอร์ และการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกต้องปรับ โดยมีค่าสถิติไคกำลังสองเท่ากับ 0.4625 และให้ค่า p-value มากกว่า 0.05 ทำให้ไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐานว่างได้ จึงกล่าวได้ว่าการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนักมีความเหมาะสมในการอธิบายข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร่องค่าสินไหมทดแทนชุดที่ 1 ภายใต้ระดับนัยสำคัญ 0.05

ตารางที่ 4 ความเหมาะสมของการแจกแจงความน่าจะเป็นทั้ง 5 การแจกแจง ในการอธิบายข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร่องค่าสินไหมทดแทนชุดที่ 2 ด้วย โดยสถิติทดสอบไคกำลังสอง

จำนวน ครั้งในการ เรียกร่อง ค่าสินไหม ทดแทน	ความถี่ ของ จำนวน ครั้งในการ เรียกร่อง ค่าสินไหม ทดแทน	ความถี่คาดหวัง				
		ปัวซอง	ปัวซอง-ลันด์ลีย์ 1 พารามิเตอร์	ปัวซอง-ลันด์ลีย์ 2 พารามิเตอร์	ปัวซอง-เลขชี้ กำลัง 2 พารามิเตอร์ แบบถ่วง น้ำหนัก	ปัวซอง-เลขชี้ กำลังแบบ แปลงอันดับ กำลังสามที่ถูกต้อง ปรับ
0	57178	56907.95	57168.78	57171.07	57170.86	57171.17
1	5167	5650.96	5169.47	5164.99	5165.20	5164.89
2	446	9.29	465.03	466.60	466.61	466.60
3	50	11.21	41.65	42.15	42.15	42.15
4	8	0.24	4.08	4.19	4.19	4.19
รวม ทั้งหมด		62849	62849	62849	62849	62849
ค่าประมาณ						
พารามิเตอร์		$\hat{\lambda} = 0.0993$	$\hat{\theta} = 10.9152$	$\hat{\alpha} = 16.1523$ $\hat{\delta} = 10.1302$	$\hat{\alpha} = 10.0697$ $\hat{\beta} = 19800$	$\hat{\theta} = 10.0692$ $\hat{p} = 8.4560$
χ^2		387.0760	6.2325	5.8481	5.8479	5.8461
DF.		2	3	2	2	2

p-value	< 0.01	0.1008	0.0537	0.0538	0.0538
AIC	42160.67	41912.79	41914.55	41914.55	41914.55
BIC	42169.72	41921.84	41932.65	41932.65	41932.65

หมายเหตุ: ทำการยุบกลุ่มเมื่อค่าความถี่คาดหวังมีค่า < 1

จากตารางที่ 4 พบว่าการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับมีค่าสถิติไคกำลังสองต่ำที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับแจกแจงอื่น ได้แก่ การแจกแจงปัวซอง การแจกแจงปัวซอง-ลินด์ลีย์ 1 พารามิเตอร์ การแจกแจงปัวซอง-ลินด์ลีย์ 2 พารามิเตอร์ และการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก โดยมีค่าสถิติไคกำลังสองเท่ากับ 5.8461 และให้ค่า p-value มากกว่า 0.05 ทำให้ไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐานว่างได้ จึงกล่าวได้ว่าการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับมีความเหมาะสมในการอธิบายข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนชุดที่ 2 ภายใต้ระดับนัยสำคัญ 0.05

ตารางที่ 5 ความเหมาะสมของการแจกแจงความน่าจะเป็นทั้ง 5 การแจกแจง ในการอธิบายข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนชุดที่ 3 ด้วย โดยสถิติทดสอบไคกำลังสอง

จำนวน ครั้งในการ เรียกร้อง ค่าสินไหม ทดแทน	ความถี่ ของ จำนวน ครั้งในการ เรียกร้อง ค่าสินไหม ทดแทน	ความถี่คาดหวัง				
		ปัวซอง	ปัวซอง-ลินด์ลีย์ 1 พารามิเตอร์	ปัวซอง-ลินด์ลีย์ 2 พารามิเตอร์	ปัวซอง-เลขชี้ กำลัง 2 พารามิเตอร์ แบบถ่วง น้ำหนัก	ปัวซอง-เลขชี้ กำลังแบบ แปลงอันดับ กำลังสามที่ถูก ปรับ
0	8544	8292.42	8535.82	8541.21	8543.73	8545.25
1	1796	2201.64	1806.37	1798.27	1795.04	1792.77
2	370	292.27	375.39	376.01	375.75	376.12
3	81	25.87	76.92	78.16	78.65	78.91
4	23	1.81	19.49	20.35	20.82	20.95
รวม ทั้งหมด	10814	10814	10814	10814	10814	10814
ค่าประมาณ						
พารามิเตอร์		$\hat{\lambda} = 0.2655$	$\hat{\theta} = 4.4572$	$\hat{\alpha} = 1.9420$ $\hat{\delta} = 4.1793$	$\hat{\alpha} = 3.7773$ $\hat{\beta} = 679.736$	$\hat{\theta} = 3.7665$ $\hat{p} = 9.8788$

χ^2	468.2896	0.9922	0.5479	0.3862	0.3615
DF.	3	3	2	2	2
p-value	< 0.01	0.8031	0.7603	0.8244	0.8346
AIC	14308.32	14061.49	14063.38	14063.43	14063.44
BIC	14315.61	14068.78	14077.96	14078.01	14078.02

หมายเหตุ: ทำการยุบกลุ่มเมื่อค่าความถี่คาดหวังมีค่า < 1

จากตารางที่ 5 พบว่าการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับมีค่าสถิติไคกำลังสองต่ำที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับ การแจกแจงอื่น ได้แก่ การแจกแจงปัวซอง การแจกแจงปัวซอง-ลินด์ลีย์ 1 พารามิเตอร์ การแจกแจงปัวซอง-ลินด์ลีย์ 2 พารามิเตอร์ และการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก โดยมีค่าสถิติไคกำลังสองเท่ากับ 0.3615 และให้ค่า p-value มากกว่า 0.05 ทำให้ไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐานว่างได้ จึงกล่าวได้ว่าการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับมีความเหมาะสมในการอธิบายข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนชุดที่ 3 ภายใต้ระดับนัยสำคัญ 0.05

4.1.4 การวัดความเหมาะสมของตัวแบบสำหรับข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

เพื่อการเปรียบเทียบความเหมาะสมของฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น ในการศึกษานี้ได้นำการแจกแจงแกมมา มาเปรียบเทียบกับ การแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก และการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ สำหรับอธิบายข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ซึ่งได้ทำการหาฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น และฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงต่าง ๆ ดังแสดงในตารางที่ 6 และผลการวิเคราะห์แสดงดังตารางที่ 7 และตารางที่ 8

สมมติฐาน

H_0 : การแจกแจงของข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนมีลักษณะการแจกแจงเป็นไปตามที่คาดไว้

H_1 : การแจกแจงของข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนไม่ได้มีลักษณะการแจกแจงเป็นไปตามที่คาดไว้

ตารางที่ 6 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (PDF) และฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (CDF) ของการแจกแจงมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

PDF : $f(y; \gamma, \theta) = \frac{\theta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} y^{\gamma-1} e^{-\theta y}; \gamma, \theta > 0, y > 0$	
การแจกแจงแกมมา	CDF : $F(y; \gamma, \theta) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \gamma(\gamma, \theta y); \gamma, \theta > 0, y > 0, \gamma(\gamma, \theta y) \text{ is incopmlete gamma function}$

PDF : $f(y; \gamma, \tau, \epsilon) = \frac{y^{\gamma-1} \gamma \tau (\epsilon + 1)^2}{\epsilon^2} \left(\frac{1}{(y + \tau)^{\gamma+1}} - \frac{1}{(y + \tau + \tau \epsilon)^{\gamma+1}} - \frac{\tau \epsilon (\gamma + 1)}{(y + \tau + \tau \epsilon)^{\gamma+2}} \right)$	
การแจกแจง แกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบ ถ่วงน้ำหนัก	$; \gamma, \tau, \epsilon > 0, y > 0$ CDF : ไม่มีรูปแบบ

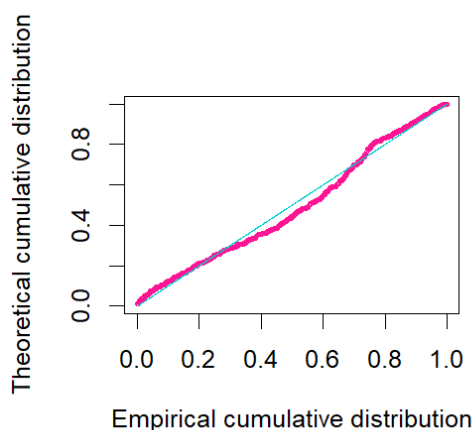
PDF : $f(y; \gamma, \delta, q) = \delta \gamma y^{\gamma-1} \left(\frac{1 - e^{-q^2}}{(y + \delta)^{\gamma+1}} + \frac{6e^{-q^2}}{(y + 2\delta)^{\gamma+1}} - \frac{6e^{-q^2}}{(y + 3\delta)^{\gamma+1}} \right)$	
การแจกแจง แกมมา-เลขชี้กำลัง แบบแปลงอันดับ กำลังสามที่ถูกปรับ	$; \theta > 0, q \in \mathbb{R}, y > 0$ CDF : ไม่มีรูปแบบ

ตารางที่ 7 ความเหมาะสมของการแจกแจงความน่าจะเป็นทั้ง 3 การแจกแจง ในการอธิบายข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนชุดที่ 4 โดยใช้สถิติทดสอบโครโมโกรอฟ-สมิธ (K-S) และสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง (A-D)

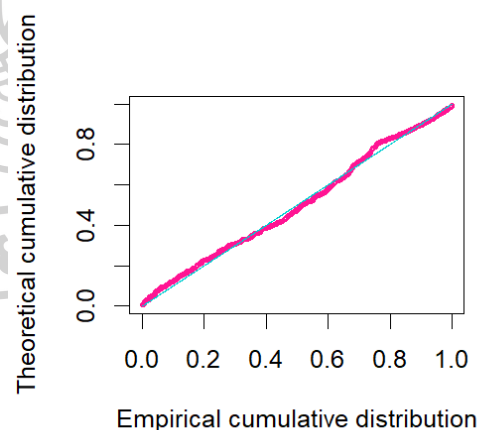
การแจกแจงมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทน			
	แกมมา	แกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก	แกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลง อันดับกำลังสามที่ถูกปรับ
ค่าประมาณ พารามิเตอร์	$\hat{\gamma} = 0.8580$ $\hat{\theta} = 0.0005$	$\hat{\gamma} = 1.01$ $\hat{\tau} = 3335.3222$ $\hat{\epsilon} = 0.3030$	$\hat{\gamma} = 1.95$ $\hat{\delta} = 409.5301$ $\hat{q} = 7241.9693$
ค่าสถิติ K-S	0.0658	0.0458	0.07
p-value	< 0.01	> 0.01	< 0.01
ค่าสถิติ A-D	7.7050	3.7790	8.9412
p-value	< 0.01	> 0.01	< 0.01
AIC	20452.27	20429.71	20533.23
BIC	20462.45	20437.89	20541.41

จากตารางที่ 7 พบว่าการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนักมีค่าสถิติโครโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ และค่าสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิงต่ำที่สุด เมื่อเทียบกับการแจกแจงอื่น ได้แก่ การแจกแจงแกมมา และการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ โดยมีค่าสถิติโครโมโกรอฟ-สมีร์นอฟเท่ากับ 0.0458 และค่าสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิงเท่ากับ 3.7790 อีกทั้งตัวสถิติทั้ง 2 ตัวยังให้ค่า p-value มากกว่า 0.01 ทำให้ไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐานว่างได้ จึงกล่าวได้ว่าแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนักมีความเหมาะสมในการอธิบายข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนชุดที่ 4 ภายใต้ระดับนัยสำคัญ 0.01

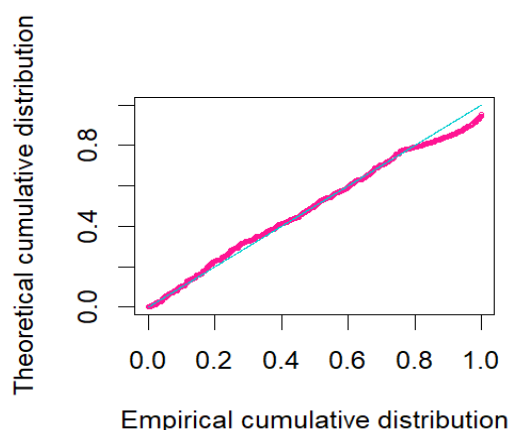
ภาพที่ 9-11 แสดงกราฟ Probability-Probability plot ของการแจกแจงแกมมา การแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก และการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ จากกราฟ Probability-Probability plot จะเห็นว่าแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก มีความเหมาะสมในการอธิบายข้อมูลมูลค่าของการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนชุดที่ 4 มากกว่าการแจกแจงแกมมา และการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ



ภาพที่ 9 Probability-Probability plot of Gamma



ภาพที่ 10 Probability-Probability plot of Gamma-NTWE



ภาพที่ 11 Probability-Probability plot of Gamma-ACRTE

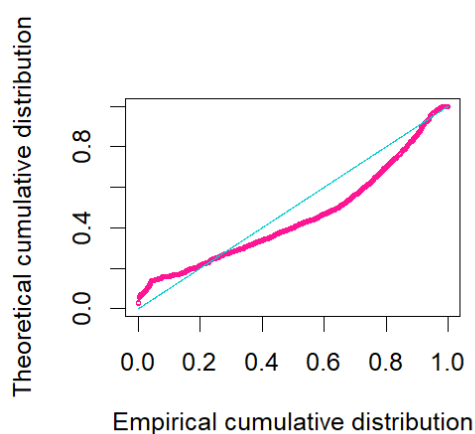
ตารางที่ 8 ความเหมาะสมของการแจกแจงความน่าจะเป็นทั้ง 3 การแจกแจง ในการอธิบายข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนชุดที่ 5 โดยใช้สถิติทดสอบโครโมโกรอฟ-สมิธรอนอฟ (K-S) และสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง (A-D)

	การแจกแจงมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน		
	แกมมา	แกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก	แกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลง อันดับกำลังสามที่ถูกรับ
ค่าประมาณ	$\hat{\mu} = 0.7385$	$\hat{\mu} = 3.9068$	$\hat{\mu} = 2.9275$
พารามิเตอร์	$\hat{\theta} = 4.182 \times 10^{-5}$	$\hat{\tau} = 1516.3266$ $\hat{\epsilon} = 44.1897$	$\hat{\delta} = 1944.9740$ $\hat{q} = -0.7227$
ค่าสถิติ K-S	0.1747	0.0278	0.0239
p-value	< 0.01	> 0.01	> 0.01
ค่าสถิติ A-D	47.9813	1.1841	0.9663
p-value	< 0.01	> 0.01	> 0.01
AIC	27855.45	27329.07	27335.43
BIC	27865.79	27337.40	27343.76

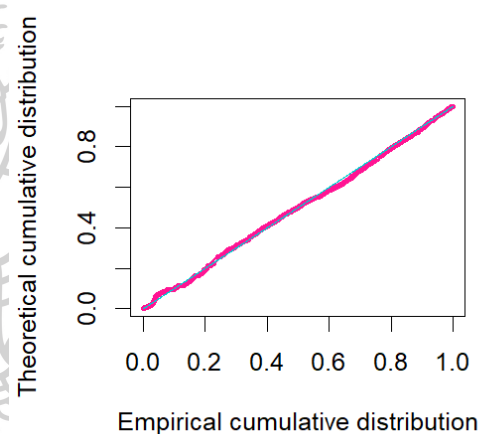
จากตารางที่ 8 พบว่าการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกรับมีค่าสถิติโครโมโกรอฟ-สมิธรอนอฟ และค่าสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิงต่ำที่สุด เมื่อเทียบกับการแจกแจงอื่น ได้แก่ การแจกแจงแกมมา และการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกรับ โดยมีค่าสถิติโครโมโกรอฟ-สมิธรอนอฟเท่ากับ 0.0239 และค่าสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิงเท่ากับ 0.9663 อีกทั้งตัวสถิติทั้ง 2 ตัวยังให้ค่า p-value มากกว่า 0.01 ทำให้ไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐานว่างได้ จึงกล่าวได้ว่าแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนักมีความ

เหมาะสมในการอธิบายข้อมูลมูลค่าในการเรียกร่องค่าสินไหมทดแทนชุดที่ 5 ภายใต้ระดับนัยสำคัญ 0.01

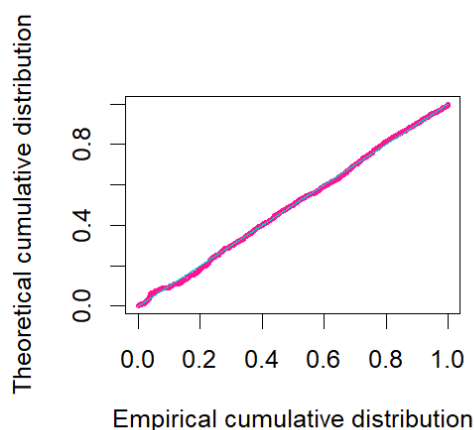
ภาพที่ 12-14 แสดงกราฟ Probability-Probability plot ของการแจกแจงแกมมา การแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก และการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ จากกราฟ Probability-Probability plot จะเห็นได้ว่าแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก และการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ มีความเหมาะสมในการอธิบายข้อมูลมูลค่าของการเรียกร่องค่าสินไหมทดแทนชุดที่ 5 มากกว่าการแจกแจงแกมมา



ภาพที่ 12 Probability-Probability plot of
Gamma



ภาพที่ 13 Probability-Probability plot of
Gamma_NTWE



ภาพที่ 14 Probability-Probability plot of Gamma_ACRTE

จากกราฟ Probability-Probability Plot ของการแจกแจงแกมมา การแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก และการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับ กำลังสามที่ถูกปรับ ซึ่งแสดงในภาพที่ 9-14 สามารถสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเชิงประจักษ์กับฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเชิงทฤษฎี โดยเส้นอ้างอิงที่มีความชัน 45 องศาทำหน้าที่เป็นตัวบ่งชี้ความสอดคล้อง หากเส้นโค้งของข้อมูลสังเกตวางตัวทับซ้อนหรืออยู่ใกล้กับเส้นอ้างอิงดังกล่าว แสดงว่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเชิงประจักษ์มีความสอดคล้องกับฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเชิงทฤษฎี หรือกล่าวได้ว่าลักษณะการแจกแจงของข้อมูลสอดคล้องกับฟังก์ชันการแจกแจงที่กำหนด ความสอดคล้องนี้สะท้อนถึงความเหมาะสมของฟังก์ชันการแจกแจง และยังสอดคล้องกับค่าสถิติ Kolmogorov-Smirnov ซึ่งพิจารณาระยะห่างสูงสุดระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงทั้งสอง ผลที่ได้จากกราฟจึงเป็นไปในทิศทางเดียวกับผลที่นำเสนอในตารางที่ 7-8

4.2 ตัวแบบคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย (BMS) โดยพิจารณาองค์ประกอบจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนร่วมกัน

4.2.1 ตัวแบบคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย (BMS) โดยพิจารณาองค์ประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนภายใต้ฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (PNTWE)

พิจารณาข้อมูลตัวอย่าง $x = (x_1, x_2, \dots, x_t)$ โดย t เป็นระยะเวลาที่กำหนด ให้ x_i แทนจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้ถือกรมธรรม์ในปีที่ i โดยที่ $i = 1, 2, \dots, t$ และ $N = \sum_{i=1}^t x_i$ แทนจำนวนครั้งทั้งหมดในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้ถือกรมธรรม์ในระยะเวลา t ปี แสดงฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นดังนี้

$$L(\lambda; x_1, x_2, \dots, x_t) = f(x_1, x_2, \dots, x_t | \lambda) = \prod_{i=1}^t \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-t\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^t x_i}}{\prod_{i=1}^t x_i!} \propto e^{-t\lambda} \lambda^N \quad (4.27)$$

พิจารณาฟังก์ชันการแจกแจงเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (NTWE) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงก่อน จะได้

$$g(\lambda) = \frac{\alpha(\beta + 1)^2}{\beta^2} e^{-\alpha\lambda} (1 - (1 + \alpha\beta\lambda)e^{-\alpha\beta\lambda}) \propto e^{-\alpha\lambda} (1 - (1 + \alpha\beta\lambda)e^{-\alpha\beta\lambda}) \quad (4.28)$$

ใช้ทฤษฎีบทของเบย์ในการหาฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังสำหรับผู้ถือกรรมธรรม์ซึ่งมีข้อมูลประวัติการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน $x_1, x_2, \dots, x_t$ ฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ ฟังก์ชันการแจกแจงก่อนหน้าคูณด้วยฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} g^*(\lambda|x_1, x_2, \dots, x_t) &\propto f(x_1, x_2, \dots, x_t|\lambda)g(\lambda) \\ &\propto e^{-t\lambda}\lambda^N \cdot e^{-\alpha\lambda}(1 - (1 + \alpha\beta\lambda)e^{-\alpha\beta\lambda}) \\ &\propto e^{-\lambda(t+\alpha)}\lambda^N(1 - e^{-\alpha\beta\lambda} - \alpha\beta\lambda e^{-\alpha\beta\lambda}) \\ &\propto (\lambda^N e^{-\lambda(t+\alpha)}) - (\lambda^N e^{-\lambda(t+\alpha+\alpha\beta)}) - (\alpha\beta\lambda^{N+1} e^{-\lambda(t+\alpha+\alpha\beta)}). \end{aligned}$$

พิจารณา

$$\int_0^\infty g^*(\lambda|x_1, x_2, \dots, x_t) d\lambda \propto \int_0^\infty ((\lambda^N e^{-\lambda(t+\alpha)}) - (\lambda^N e^{-\lambda(t+\alpha+\alpha\beta)}) - (\alpha\beta\lambda^{N+1} e^{-\lambda(t+\alpha+\alpha\beta)})) d\lambda$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g^*(\lambda|x_1, x_2, \dots, x_t) d\lambda &= \int_0^\infty C((\lambda^N e^{-\lambda(t+\alpha)}) - (\lambda^N e^{-\lambda(t+\alpha+\alpha\beta)}) - (\alpha\beta\lambda^{N+1} e^{-\lambda(t+\alpha+\alpha\beta)})) d\lambda \\ &= 1 \end{aligned}$$

โดยที่ C เป็นค่าคงที่

พิจารณา

$$\begin{aligned} C \left(\int_0^\infty \lambda^N e^{-\lambda(t+\alpha)} d\lambda - \int_0^\infty \lambda^N e^{-\lambda(t+\alpha+\alpha\beta)} d\lambda - \alpha\beta \int_0^\infty \lambda^{N+1} e^{-\lambda(t+\alpha+\alpha\beta)} d\lambda \right) &= 1 \\ C \left(\int_0^\infty \left(\frac{u}{(t+\alpha)} \right)^N e^{-u} \frac{du}{(t+\alpha)} - \int_0^\infty \left(\frac{u}{(t+\alpha+\alpha\beta)} \right)^N e^{-u} \frac{du}{(t+\alpha+\alpha\beta)} \right. \\ &\quad \left. - \alpha\beta \int_0^\infty \left(\frac{u}{(t+\alpha+\alpha\beta)} \right)^{N+1} e^{-u} \frac{du}{(t+\alpha+\alpha\beta)} \right) = 1 \\ \left(\frac{\Gamma(N+1)}{(t+\alpha)^{N+1}} - \frac{\Gamma(N+1)}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+1}} - \frac{\alpha\beta\Gamma(N+2)}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+2}} \right) &= 1 \end{aligned}$$

จะได้

$$C = \frac{1}{\Gamma(N+1) \left(\frac{1}{(t+\alpha)^{N+1}} - \frac{1}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+1}} - \frac{\alpha\beta(N+1)}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+2}} \right)}$$

ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังของการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก สำหรับองค์ประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ได้ดังนี้

$$g^*(\lambda|x_1, x_2, \dots, x_t) = \frac{(\lambda^N e^{-\lambda(t+\alpha)}) - (\lambda^N e^{-\lambda(t+\alpha+\alpha\beta)}) - (\alpha\beta\lambda^{N+1} e^{-\lambda(t+\alpha+\alpha\beta)})}{\Gamma(N+1) \left(\frac{1}{(t+\alpha)^{N+1}} - \frac{1}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+1}} - \frac{\alpha\beta(N+1)}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+2}} \right)} \quad (4.29)$$

ในปัจจุบันมีวิธีมากมายในการคำนวณเบี้ยประกันภัย ในงานวิจัยนี้มีการใช้หลักการคำนวณ เบี้ยประกันสุทธิ (net premium calculation principle) สำหรับการคำนวณเบี้ยประกัน หลักการ กำหนดเบี้ยประกันนี้อิงอยู่บนกรอบแนวคิดแบบเบย์เซียน (Bayesian) โดยเริ่มจากการหาฟังก์ชันการ แจกแจงหลัง (Posterior distribution function) ของพารามิเตอร์ความเสี่ยง λ โดยสมมติว่าฟังก์ชัน การแจกแจงก่อนหน้า (Prior distribution function) ของ λ มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนักจากนั้นจะทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ความเสี่ยงโดยใช้ตัวประมาณ แบบเบย์ (Bayes estimator) ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียแบบกำลังสอง (Quadratic error loss function) ซึ่งกำหนดเป็น $L(\lambda, \hat{\lambda}) = (\hat{\lambda} - \lambda)^2$ ฟังก์ชันนี้ใช้วัดค่าความสูญเสียที่เกิดจากการ ประมาณค่า λ ที่แท้จริงด้วยค่า $\hat{\lambda}$ ตัวประมาณแบบเบย์ $\hat{\lambda}$ จะถูกเลือกให้มีค่าการสูญเสียที่คาดหวัง $E[L(\lambda, \hat{\lambda})]$ มีค่าน้อยที่สุด ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียแบบกำลังสอง ตัวประมาณแบบเบย์จะเท่ากับ ค่าคาดหวังของพารามิเตอร์ λ ภายใต้ฟังก์ชันการแจกแจงหลัง เบี้ยประกันสุทธิ (Net premium) แสดงถึงจำนวนครั้งที่คาดว่าจะเกิดการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้ถือกรมธรรม์ ให้ $\hat{\lambda}_{(t+1)}$ แทน ค่าจำนวนครั้งเฉลี่ยของการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้ถือกรมธรรม์ที่มีประวัติการเรียกร้องค่า สินไหมทดแทน $x_1, x_2, \dots, x_n$ ค่านี้คำนวณจากค่าคาดหวังของฟังก์ชันการแจกแจงหลังของการแจก แจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนักดังนี้

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{t+1} &= E[\lambda|x_1, x_2, \dots, x_t] \\ &= \frac{1}{\Gamma(N+1) \left(\frac{1}{(t+\alpha)^{N+1}} - \frac{1}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+1}} - \frac{\alpha\beta(N+1)}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+2}} \right)} \int_0^\infty \lambda (\lambda^N e^{-\lambda(t+\alpha)} - \lambda^N e^{-\lambda(t+\alpha+\alpha\beta)} - \alpha\beta\lambda^{N+1} e^{-\lambda(t+\alpha+\alpha\beta)}) d\lambda \\ &= \frac{1}{\Gamma(N+1) \left(\frac{1}{(t+\alpha)^{N+1}} - \frac{1}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+1}} - \frac{\alpha\beta(N+1)}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+2}} \right)} \left(\int_0^\infty \lambda^{N+1} e^{-\lambda(t+\alpha)} d\lambda - \int_0^\infty \lambda^{N+1} e^{-\lambda(t+\alpha+\alpha\beta)} d\lambda - \int_0^\infty \alpha\beta\lambda^{N+2} e^{-\lambda(t+\alpha+\alpha\beta)} d\lambda \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(N+1) \left(\frac{1}{(t+\alpha)^{N+1}} - \frac{1}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+1}} - \frac{\alpha\beta(N+1)}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+2}} \right)} \left(\int_0^\infty \left(\frac{u}{(t+\alpha)} \right)^{N+1} e^{-u} \frac{du}{(t+\alpha)} \right. \\
&\quad \left. - \int_0^\infty \left(\frac{u}{(t+\alpha+\alpha\beta)} \right)^{N+1} e^{-u} \frac{du}{(t+\alpha+\alpha\beta)} \right. \\
&\quad \left. - \alpha\beta \int_0^\infty \left(\frac{u}{(t+\alpha+\alpha\beta)} \right)^{N+2} e^{-u} \frac{du}{(t+\alpha+\alpha\beta)} \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(N+1) \left(\frac{1}{(t+\alpha)^{N+1}} - \frac{1}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+1}} - \frac{\alpha\beta(N+1)}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+2}} \right)} \left(\frac{\Gamma(N+2)}{(t+\alpha)^{N+2}} - \frac{\Gamma(N+2)}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha\beta\Gamma(N+3)}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+3}} \right) \\
&= \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N+1) \left(\frac{1}{(t+\alpha)^{N+1}} - \frac{1}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+1}} - \frac{\alpha\beta(N+1)}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+2}} \right)} \left(\frac{(N+1)}{(t+\alpha)^{N+2}} - \frac{(N+1)}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha\beta(N+2)(N+1)}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+3}} \right) \\
&= \frac{(N+1)}{\left(\frac{1}{(t+\alpha)^{N+1}} - \frac{1}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+1}} - \frac{\alpha\beta(N+1)}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+2}} \right)} \left(\frac{1}{(t+\alpha)^{N+2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+2}} - \frac{\alpha\beta(N+2)}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+3}} \right) \tag{4.30}
\end{aligned}$$

สมมติว่าในช่วงเวลา $t = 0$ ปีเบี้ยประกันภัยเริ่มต้นหรือที่เรียกว่าเบี้ยประกันภัยพื้นฐานคือ 100 ในช่วงเวลา ถัดไป $t + 1$ ปี อัตราเบี้ยประกันภัยเมื่อคำนึงถึงเพียงจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนสามารถคำนวณ โดยสูตรต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
Preimum_{t+1} &= \frac{\hat{\lambda}_{t+1}}{\hat{\lambda}_{0+1}} \times 100 = \frac{E[\lambda|x_1, x_2, \dots, x_t]}{E[\lambda]} \times 100\% \\
&= \frac{\frac{(N+1)}{\left(\frac{1}{(t+\alpha)^{N+1}} - \frac{1}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+1}} - \frac{\alpha\beta(N+1)}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+2}} \right)} \left(\frac{1}{(t+\alpha)^{N+2}} - \frac{1}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+2}} - \frac{\alpha\beta(N+2)}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+3}} \right)}{\frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{(\alpha+\alpha\beta)} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\alpha\beta)} \right)} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{(\alpha+\alpha\beta)^2} - \frac{2\alpha\beta}{(\alpha+\alpha\beta)^3} \right)} \\
&\quad \times 100\%
\end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{(N+1)}{\left(\frac{1}{(t+\alpha)^{N+1}} - \frac{1}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+1}} - \frac{\alpha\beta(N+1)}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+2}}\right)} \left(\frac{1}{(t+\alpha)^{N+2}} - \frac{1}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+2}} - \frac{\alpha\beta(N+2)}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+3}}\right)}{\frac{\alpha(\beta+1)^2}{\beta^2} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{(\alpha+\alpha\beta)^2} - \frac{2\alpha\beta}{(\alpha+\alpha\beta)^3}\right)} \times 100\% \quad (4.31)$$

โดยที่ $\alpha, \beta > 0$ และ $\sum_{i=1}^t x_i$

4.2.2 ตัวแบบคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย (BMS) โดยพิจารณาองค์ประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนภายใต้ฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (PACRTE)

พิจารณาข้อมูลตัวอย่าง $x = (x_1, x_2, \dots, x_t)$ โดย t เป็นระยะเวลาที่กำหนดให้ x_i แทนจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้ถือกรมธรรม์ในปีที่ i โดยที่ $i = 1, 2, \dots, t$ และ $N = \sum_{i=1}^t x_i$ แทนจำนวนครั้งทั้งหมดในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้ถือกรมธรรม์ในระยะเวลา t ปี แสดงฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นดังนี้

$$L(\lambda; x_1, x_2, \dots, x_t) = f(x_1, x_2, \dots, x_t | \lambda) = \prod_{i=1}^t \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-t\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^t x_i}}{\prod_{i=1}^t x_i!} \propto e^{-t\lambda} \lambda^N \quad (4.32)$$

พิจารณาฟังก์ชันการแจกแจงเลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (PACRTE) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงก่อน จะได้

$$g(\lambda) = \theta e^{-\theta\lambda} (1 - e^{-p^2} + 6e^{-p^2-\theta\lambda} - 6e^{-p^2-2\theta\lambda}) \propto e^{-\theta\lambda} (1 - e^{-p^2} + 6e^{-p^2-\theta\lambda} - 6e^{-p^2-2\theta\lambda}) \quad (4.33)$$

ใช้ทฤษฎีบทของเบย์ในการหาฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังสำหรับผู้ถือกรมธรรม์ซึ่งมีข้อมูลประวัติการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน $x_1, x_2, \dots, x_t$ ฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังเป็นสัดส่วนโดยตรงกับฟังก์ชันการแจกแจงก่อนหน้าคูณด้วยฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$g^*(\lambda | x_1, x_2, \dots, x_t) \propto f(x_1, x_2, \dots, x_t | \lambda) g(\lambda) \\ \propto e^{-t\lambda} \lambda^N \cdot e^{-\theta\lambda} (1 - e^{-p^2} + 6e^{-p^2-\theta\lambda} - 6e^{-p^2-2\theta\lambda})$$

$$\begin{aligned}
& \propto e^{-\lambda(t+\theta)} \lambda^N (1 - e^{-p^2} + 6e^{-p^2-\theta\lambda} - 6e^{-p^2-2\theta\lambda}) \\
& \propto (\lambda^N e^{-\lambda(t+\theta)}) - (e^{-p^2} \lambda^N e^{-\lambda(t+\theta)}) + (6e^{-p^2} \lambda^N e^{-\lambda(t+2\theta)}) \\
& \quad - (6e^{-p^2} \lambda^N e^{-\lambda(t+3\theta)})
\end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty g^*(\lambda|x_1, x_2, \dots, x_t) d\lambda \\
& \propto \int_0^\infty \left((\lambda^N e^{-\lambda(t+\theta)}) - (e^{-p^2} \lambda^N e^{-\lambda(t+\theta)}) + (6e^{-p^2} \lambda^N e^{-\lambda(t+2\theta)}) \right. \\
& \quad \left. - (6e^{-p^2} \lambda^N e^{-\lambda(t+3\theta)}) \right) d\lambda.
\end{aligned}$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty g^*(\lambda|x_1, x_2, \dots, x_t) d\lambda \\
& = \int_0^\infty C \left((\lambda^N e^{-\lambda(t+\theta)}) - (e^{-p^2} \lambda^N e^{-\lambda(t+\theta)}) + (6e^{-p^2} \lambda^N e^{-\lambda(t+2\theta)}) \right. \\
& \quad \left. - (6e^{-p^2} \lambda^N e^{-\lambda(t+3\theta)}) \right) d\lambda = 1
\end{aligned}$$

โดยที่ C เป็นค่าคงที่

พิจารณา

$$\begin{aligned}
& C \left(\int_0^\infty \lambda^N e^{-\lambda(t+\theta)} d\lambda - e^{-p^2} \int_0^\infty \lambda^N e^{-\lambda(t+\theta)} d\lambda + 6e^{-p^2} \int_0^\infty \lambda^N e^{-\lambda(t+2\theta)} d\lambda \right. \\
& \quad \left. - 6e^{-p^2} \int_0^\infty \lambda^N e^{-\lambda(t+3\theta)} d\lambda \right) = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C \left(\int_0^\infty \left(\frac{u}{(t+\theta)} \right)^N e^{-u} \frac{du}{(t+\theta)} \right. \\
& \quad - e^{-p^2} \int_0^\infty \left(\frac{u}{(t+\theta)} \right)^N e^{-u} \frac{du}{(t+\theta)} \\
& \quad + 6e^{-p^2} \int_0^\infty \left(\frac{u}{(t+2\theta)} \right)^N e^{-u} \frac{du}{(t+2\theta)} \\
& \quad \left. - 6e^{-p^2} \int_0^\infty \left(\frac{u}{(t+3\theta)} \right)^N e^{-u} \frac{du}{(t+3\theta)} \right) = 1
\end{aligned}$$

$$C \left(\frac{\Gamma(N+1)}{(t+\theta)^{N+1}} - \frac{e^{-p^2}\Gamma(N+1)}{(t+\theta)^{N+1}} + \frac{6e^{-p^2}\Gamma(N+1)}{(t+2\theta)^{N+1}} - \frac{6e^{-p^2}\Gamma(N+1)}{(t+3\theta)^{N+1}} \right) = 1$$

$$C\Gamma(N+1) \left(\frac{1}{(t+\theta)^{N+1}} - \frac{e^{-p^2}}{(t+\theta)^{N+1}} + \frac{6e^{-p^2}}{(t+2\theta)^{N+1}} - \frac{6e^{-p^2}}{(t+3\theta)^{N+1}} \right) = 1$$

จะได้

$$C = \frac{1}{\Gamma(N+1) \left(\frac{1}{(t+\theta)^{N+1}} - \frac{e^{-p^2}}{(t+\theta)^{N+1}} + \frac{6e^{-p^2}}{(t+2\theta)^{N+1}} - \frac{6e^{-p^2}}{(t+3\theta)^{N+1}} \right)}$$

ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังของการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับสำหรับองค์ประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & g^*(\lambda|x_1, x_2, \dots, x_t) \\ &= \frac{(\lambda^N e^{-\lambda(t+\theta)}) - (e^{-p^2} \lambda^N e^{-\lambda(t+\theta)}) + (6e^{-p^2} \lambda^N e^{-\lambda(t+2\theta)}) - (6e^{-p^2} \lambda^N e^{-\lambda(t+3\theta)})}{\Gamma(N+1) \left(\frac{1}{(t+\theta)^{N+1}} - \frac{e^{-p^2}}{(t+\theta)^{N+1}} + \frac{6e^{-p^2}}{(t+2\theta)^{N+1}} - \frac{6e^{-p^2}}{(t+3\theta)^{N+1}} \right)} \end{aligned} \quad (4.34)$$

ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียแบบกำลังสอง ตัวประมาณแบบเบย์จะเท่ากับค่าคาดหวังของพารามิเตอร์ λ ภายใต้ฟังก์ชันการแจกแจงหลัง เบย์ประกันสุทธิ (Net premium) แสดงถึงจำนวนครั้งที่คาดว่าจะเกิดการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้ถือกรมธรรม์ ให้ $\hat{\lambda}_{t+1}$ แทนจำนวนครั้งเฉลี่ยของการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้ถือกรมธรรม์ที่มีประวัติการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน $x_1, x_2, \dots, x_n$ ค่านี้คำนวณจากค่าคาดหวังของฟังก์ชันการแจกแจงหลังของการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับดังนี้:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{t+1} &= E[\lambda|x_1, x_2, \dots, x_t] \\ &= \frac{1}{\Gamma(N+1) \left(\frac{1}{(t+\theta)^{N+1}} - \frac{e^{-p^2}}{(t+\theta)^{N+1}} + \frac{6e^{-p^2}}{(t+2\theta)^{N+1}} - \frac{6e^{-p^2}}{(t+3\theta)^{N+1}} \right)} \int_0^\infty \lambda \left((\lambda^N e^{-\lambda(t+\theta)}) \right. \\ &\quad \left. - (e^{-p^2} \lambda^N e^{-\lambda(t+\theta)}) + (6e^{-p^2} \lambda^N e^{-\lambda(t+2\theta)}) - (6e^{-p^2} \lambda^N e^{-\lambda(t+3\theta)}) \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{\Gamma(N+1) \left(\frac{1}{(t+\theta)^{N+1}} - \frac{e^{-p^2}}{(t+\theta)^{N+1}} + \frac{6e^{-p^2}}{(t+2\theta)^{N+1}} - \frac{6e^{-p^2}}{(t+3\theta)^{N+1}} \right)} \left(\int_0^\infty \lambda^{N+1} e^{-\lambda(t+\theta)} d\lambda \right. \\ &\quad \left. - e^{-p^2} \int_0^\infty \lambda^{N+1} e^{-\lambda(t+\theta)} d\lambda + 6e^{-p^2} \int_0^\infty \lambda^{N+1} e^{-\lambda(t+2\theta)} d\lambda - 6e^{-p^2} \int_0^\infty \lambda^{N+1} e^{-\lambda(t+3\theta)} d\lambda \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(N+1) \left(\frac{1}{(t+\theta)^{N+1}} - \frac{e^{-p^2}}{(t+\theta)^{N+1}} + \frac{6e^{-p^2}}{(t+2\theta)^{N+1}} - \frac{6e^{-p^2}}{(t+3\theta)^{N+1}} \right)} \left(\int_0^\infty \left(\frac{u}{(t+\theta)} \right)^{N+1} e^{-u} \frac{du}{(t+\theta)} \right. \\
&\quad - e^{-p^2} \int_0^\infty \left(\frac{u}{(t+\theta)} \right)^{N+1} e^{-u} \frac{du}{(t+\theta)} \\
&\quad \left. + 6e^{-p^2} \int_0^\infty \left(\frac{u}{(t+2\theta)} \right)^{N+1} e^{-u} \frac{du}{(t+2\theta)} \int_0^\infty \left(\frac{u}{(t+3\theta)} \right)^{N+1} e^{-u} \frac{du}{(t+3\theta)} \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(N+1) \left(\frac{1}{(t+\theta)^{N+1}} - \frac{e^{-p^2}}{(t+\theta)^{N+1}} + \frac{6e^{-p^2}}{(t+2\theta)^{N+1}} - \frac{6e^{-p^2}}{(t+3\theta)^{N+1}} \right)} \left(\frac{\Gamma(N+2)}{(t+\theta)^{N+2}} - \frac{e^{-p^2}\Gamma(N+2)}{(t+\theta)^{N+2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{6e^{-p^2}\Gamma(N+2)}{(t+2\theta)^{N+2}} - \frac{6e^{-p^2}\Gamma(N+2)}{(t+3\theta)^{N+2}} \right) \\
&= \frac{\Gamma(N+2)}{\Gamma(N+1) \left(\frac{1}{(t+\theta)^{N+1}} - \frac{e^{-p^2}}{(t+\theta)^{N+1}} + \frac{6e^{-p^2}}{(t+2\theta)^{N+1}} - \frac{6e^{-p^2}}{(t+3\theta)^{N+1}} \right)} \left(\frac{1}{(t+\theta)^{N+2}} - \frac{e^{-p^2}}{(t+\theta)^{N+2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{6e^{-p^2}}{(t+2\theta)^{N+2}} - \frac{6e^{-p^2}}{(t+3\theta)^{N+2}} \right) \\
&= \frac{(N+1)}{\left(\frac{1}{(t+\theta)^{N+1}} - \frac{e^{-p^2}}{(t+\theta)^{N+1}} + \frac{6e^{-p^2}}{(t+2\theta)^{N+1}} - \frac{6e^{-p^2}}{(t+3\theta)^{N+1}} \right)} \left(\frac{1}{(t+\theta)^{N+2}} - \frac{e^{-p^2}}{(t+\theta)^{N+2}} + \frac{6e^{-p^2}}{(t+2\theta)^{N+2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{6e^{-p^2}}{(t+3\theta)^{N+2}} \right) \tag{4.35}
\end{aligned}$$

สมมติว่าในช่วงเวลา $t = 0$ ปี เบี้ยประกันภัยเริ่มต้นหรือที่เรียกว่าเบี้ยประกันภัยพื้นฐานคือ 100 ในช่วงเวลา ถัดไป $t + 1$ ปี อัตราเบี้ยประกันภัยเมื่อคำนึงถึงเพียงจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนสามารถคำนวณ โดยสูตรต่อไปนี้

$$Preimum_{t+1} = \frac{\hat{\lambda}_{t+1}}{\hat{\lambda}_{0+1}} \times 100 = \frac{E[\lambda|x_1, x_2, \dots, x_t]}{E[\lambda]} \times 100\%$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(N+1)}{\left(\frac{1}{(t+\theta)^{N+1}} - \frac{e^{-p^2}}{(t+\theta)^{N+1}} + \frac{6e^{-p^2}}{(t+2\theta)^{N+1}} - \frac{6e^{-p^2}}{(t+3\theta)^{N+1}} \right)} \left(\frac{1}{(t+\theta)^{N+2}} - \frac{e^{-p^2}}{(t+\theta)^{N+2}} + \frac{6e^{-p^2}}{(t+2\theta)^{N+2}} - \frac{6e^{-p^2}}{(t+3\theta)^{N+2}} \right) \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{\theta} - \frac{e^{-p^2}}{\theta} + \frac{6e^{-p^2}}{2\theta} - \frac{6e^{-p^2}}{3\theta} \right)} \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{e^{-p^2}}{\theta^2} + \frac{6e^{-p^2}}{(2\theta)^2} - \frac{6e^{-p^2}}{(3\theta)^2} \right) \\
&\times 100\%
\end{aligned}$$

(4.36)

โดยที่ $\theta, p > 0$ และ $\sum_{i=1}^t x_i$

4.2.3 ตัวแบบคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย (BMS) โดยพิจารณาองค์ประกอบจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนภายใต้ฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (PNTWE) และฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (GNTWE)

ในหัวข้อ 4.2.1 ได้กำหนดจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้ถือกรมธรรม์ในระยะเวลา t ปี ซึ่งสามารถแสดงเป็นผลรวมของจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนแต่ละบุคคลได้เป็น $N = \sum_{i=1}^t x_i$ มูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนแต่ละครั้งจะแทนด้วย y_j โดยที่ $j = 1, 2, \dots, N$ หรือแสดงในรูปเวกเตอร์ $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ ดังนั้นมูลค่ารวมของการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้ถือกรมธรรม์ในช่วง t ปี จะแทนด้วย $S = \sum_{j=1}^N y_j$ ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นแสดงดังนี้

$$\begin{aligned} L(y_1, y_2, \dots, y_N | \gamma, \theta) &= f(y_1, y_2, \dots, y_N | \gamma, \theta) \\ &= \prod_{j=1}^N \frac{\theta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} y_j^{\gamma-1} e^{-\theta y_j} \\ &= \left(\frac{\theta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \right)^N \prod_{j=1}^N y_j^{\gamma-1} e^{-\theta \sum_{j=1}^N y_j} \propto \theta^{\gamma N} e^{-\theta S} \end{aligned} \quad (4.37)$$

พิจารณาฟังก์ชันการแจกแจงเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (GNTWE) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงก่อน จะได้

$$g(\theta) = \frac{\tau(\epsilon + 1)^2}{\epsilon^2} e^{-\tau\theta} (1 - (1 + \tau\epsilon\theta)e^{-\tau\epsilon\theta}) \propto e^{-\tau\theta} (1 - (1 + \tau\epsilon\theta)e^{-\tau\epsilon\theta}) \quad (4.38)$$

ใช้ทฤษฎีบทของเบย์ในการหาฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังสำหรับผู้ถือกรมธรรม์ซึ่งมีข้อมูลประวัติการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน $y_1, y_2, \dots, y_N$ ฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังเป็นสัดส่วนโดยตรงกับฟังก์ชันการแจกแจงก่อนหน้าคูณด้วยฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} g^*(\theta | y_1, y_2, \dots, y_t) &\propto f(y_1, y_2, \dots, y_t | \theta) g(\theta) \\ &\propto \theta^{\gamma N} e^{-\theta S} \cdot e^{-\tau\theta} (1 - (1 + \tau\epsilon\theta)e^{-\tau\epsilon\theta}) \\ &\propto \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\tau)} (1 - (1 + \tau\epsilon\theta)e^{-\tau\epsilon\theta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\propto \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\tau)} (1 - e^{-\tau\epsilon\theta} + \tau\epsilon\theta e^{-\tau\epsilon\theta}) \\ &\propto (\theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\tau)}) - (\theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\tau+\tau\epsilon)}) - (\tau\epsilon\theta^{\gamma N+1} e^{-\theta(S+\tau+\tau\epsilon)}) \end{aligned}$$

พิจารณา

$$\int_0^\infty g^*(\theta|y_1, y_2, \dots, y_t) d\lambda \propto \int_0^\infty ((\theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\tau)}) - (\theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\tau+\tau\epsilon)}) - (\tau\epsilon\theta^{\gamma N+1} e^{-\theta(S+\tau+\tau\epsilon)})) d\theta$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g^*(\theta|y_1, y_2, \dots, y_t) d\theta &= \int_0^\infty C((\theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\tau)}) - (\theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\tau+\tau\epsilon)}) - (\tau\epsilon\theta^{\gamma N+1} e^{-\theta(S+\tau+\tau\epsilon)})) d\theta \\ &= 1 \end{aligned}$$

โดยที่ C เป็นค่าคงที่

พิจารณา

$$\begin{aligned} C \left(\int_0^\infty \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\tau)} d\theta - \int_0^\infty \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\tau+\tau\epsilon)} d\theta - \tau\epsilon \int_0^\infty \theta^{\gamma N+1} e^{-\theta(S+\tau+\tau\epsilon)} d\theta \right) &= 1 \\ C \left(\int_0^\infty \left(\frac{u}{(S+\tau)} \right)^{\gamma N} e^{-u} \frac{du}{(S+\tau)} - \int_0^\infty \left(\frac{u}{(S+\tau+\tau\epsilon)} \right)^{\gamma N} e^{-u} \frac{du}{(S+\tau+\tau\epsilon)} \right. \\ &\quad \left. - \tau\epsilon \int_0^\infty \left(\frac{u}{(S+\tau+\tau\epsilon)} \right)^{\gamma N+1} e^{-u} \frac{du}{(S+\tau+\tau\epsilon)} \right) = 1 \\ C \left(\frac{\Gamma(\gamma N + 1)}{(S+\tau)^{\gamma N+1}} - \frac{\Gamma(\gamma N + 1)}{(S+\tau+\tau\epsilon)^{\gamma N+1}} - \frac{\tau\epsilon\Gamma(\gamma N + 2)}{(S+\tau+\tau\epsilon)^{\gamma N+2}} \right) &= 1 \\ C\Gamma(\gamma N + 1) \left(\frac{1}{(S+\tau)^{\gamma N+1}} - \frac{1}{(S+\tau+\tau\epsilon)^{\gamma N+1}} - \frac{\tau\epsilon(\gamma N + 1)}{(S+\tau+\tau\epsilon)^{\gamma N+2}} \right) &= 1 \end{aligned}$$

จะได้

$$C = \frac{1}{\Gamma(\gamma N + 1) \left(\frac{1}{(S+\tau)^{\gamma N+1}} - \frac{1}{(S+\tau+\tau\epsilon)^{\gamma N+1}} - \frac{\tau\epsilon(\gamma N + 1)}{(S+\tau+\tau\epsilon)^{\gamma N+2}} \right)}$$

ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังของการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก สำหรับองค์ประกอบมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทน ได้ดังนี้

$$g^*(\theta|y_1, y_2, \dots, y_t) = \frac{(\theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\tau)}) - (\theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\tau+\tau\epsilon)}) - (\tau\epsilon\theta^{\gamma N+1} e^{-\theta(S+\tau+\tau\epsilon)})}{\Gamma(\gamma N + 1) \left(\frac{1}{(S+\tau)^{\gamma N+1}} - \frac{1}{(S+\tau+\tau\epsilon)^{\gamma N+1}} - \frac{\tau\epsilon(\gamma N + 1)}{(S+\tau+\tau\epsilon)^{\gamma N+2}} \right)} \quad (4.39)$$

ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียแบบกำลังสอง ตัวประมาณแบบเบย์จะเท่ากับค่าคาดหวังของพารามิเตอร์ θ ภายใต้ฟังก์ชันการแจกแจงหลัง เบี้ยประกันสุทธิ (Net premium) แสดงถึงมูลค่าที่คาดว่าจะเกิดการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้ถือกรมธรรม์ ให้ $\hat{\theta}_{t+1}$ แทนมูลค่าเฉลี่ยของการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้ถือกรมธรรม์ที่มีประวัติการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน $y_1, y_2, \dots, y_N$ ค่านี้คำนวณจากค่าคาดหวังของฟังก์ชันการแจกแจงหลังของการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนักดังนี้

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}_{t+1} &= E[\theta | y_1, y_2, \dots, y_N] \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\gamma N + 1) \left(\frac{1}{(S + \tau)^{\gamma N + 1}} - \frac{1}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 1}} - \frac{\tau\epsilon(\gamma N + 1)}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 2}} \right)} \int_0^\infty \theta ((\theta^{\gamma N} e^{-\theta(S + \tau)}) \\
 &\quad - (\theta^{\gamma N} e^{-\theta(S + \tau + \tau\epsilon)}) - (\tau\epsilon \theta^{\gamma N + 1} e^{-\theta(S + \tau + \tau\epsilon)})) d\theta \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\gamma N + 1) \left(\frac{1}{(S + \tau)^{\gamma N + 1}} - \frac{1}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 1}} - \frac{\tau\epsilon(\gamma N + 1)}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 2}} \right)} \int_0^\infty (\theta^{\gamma N + 1} e^{-\theta(S + \tau)} \\
 &\quad - (\theta^{\gamma N + 1} e^{-\theta(S + \tau + \tau\epsilon)}) - (\tau\epsilon \theta^{\gamma N + 2} e^{-\theta(S + \tau + \tau\epsilon)})) d\theta \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\gamma N + 1) \left(\frac{1}{(S + \tau)^{\gamma N + 1}} - \frac{1}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 1}} - \frac{\tau\epsilon(\gamma N + 1)}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 2}} \right)} \int_0^\theta \theta^{\gamma N + 1} e^{-\theta(S + \tau)} d\theta \\
 &\quad - \int_0^\infty \theta^{\gamma N + 1} e^{-\theta(S + \tau + \tau\epsilon)} d\theta - \tau\epsilon \int_0^\infty \theta^{\gamma N + 2} e^{-\theta(S + \tau + \tau\epsilon)} d\theta \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\gamma N + 1) \left(\frac{1}{(S + \tau)^{\gamma N + 1}} - \frac{1}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 1}} - \frac{\tau\epsilon(\gamma N + 1)}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 2}} \right)} \int_0^\theta \left(\frac{u}{(S + \tau)} \right)^{\gamma N + 1} e^{-u} \frac{du}{(S + \tau)} \\
 &\quad - \int_0^\infty \left(\frac{u}{(S + \tau + \tau\epsilon)} \right)^{\gamma N + 1} e^{-u} \frac{du}{(S + \tau + \tau\epsilon)} - \tau\epsilon \int_0^\infty \left(\frac{u}{(S + \tau + \tau\epsilon)} \right)^{\gamma N + 2} \frac{du}{(S + \tau + \tau\epsilon)} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\gamma N + 1) \left(\frac{1}{(S + \tau)^{\gamma N + 1}} - \frac{1}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 1}} - \frac{\tau\epsilon(\gamma N + 1)}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 2}} \right)} \left(\frac{\Gamma(\gamma N + 2)}{(S + \tau)^{\gamma N + 2}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\Gamma(\gamma N + 2)}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 2}} - \frac{\tau\epsilon \Gamma(\gamma N + 2)}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 3}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(\gamma N + 2)}{\Gamma(\gamma N + 1) \left(\frac{1}{(S + \tau)^{\gamma N + 1}} - \frac{1}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 1}} - \frac{\tau\epsilon(\gamma N + 1)}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 2}} \right)} \left(\frac{1}{(S + \tau)^{\gamma N + 2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 2}} - \frac{\tau\epsilon(\gamma N + 2)}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 3}} \right) \\
&= \frac{(\gamma N + 1)}{\left(\frac{1}{(S + \tau)^{\gamma N + 1}} - \frac{1}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 1}} - \frac{\tau\epsilon(\gamma N + 1)}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 2}} \right)} \left(\frac{1}{(S + \tau)^{\gamma N + 2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 2}} - \frac{\tau\epsilon(\gamma N + 2)}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 3}} \right) \quad (4.40)
\end{aligned}$$

การแจกแจงภายหลังแสดงให้เห็นถึงการแจกแจงที่ประมาณของพารามิเตอร์ความเสี่ยงภัย โดยพิจารณาจากข้อมูลค่าสังเกต นั่นคือการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของพารามิเตอร์ความเสี่ยงภัย θ ภายใต้ข้อมูลค่าสังเกต y วัตถุประสงค์หลักของงานวิจัยนี้คือการคำนวณค่าคาดหวังของข้อมูลค่าสังเกตหรือมูลค่าของการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ภายใต้พารามิเตอร์ความเสี่ยงภัยหรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือค่าคาดหวังของเหตุการณ์ในอนาคต ภายใต้เหตุการณ์ก่อนหน้านี้ (พารามิเตอร์ความเสี่ยงภัย) แต่ในความเป็นจริงเรายังไม่ทราบข้อมูลที่แน่นอนเกี่ยวกับเหตุการณ์ก่อนหน้านี้หรือพารามิเตอร์ความเสี่ยงนั้น เพื่อแก้ไขปัญหานี้ผู้วิจัยจึงใช้วิธีของเบย์เพื่อระบุค่าพารามิเตอร์ความเสี่ยงซึ่งสอดคล้องกับค่าคาดหวังของฟังก์ชันการแจกแจงหลัง ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของการแจกแจงหลัง

เป็นที่ทราบว่าคุณค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่มแบบแกมมา คือ $\frac{\gamma}{\theta}$ เขียนแทนด้วย $E[Y|\theta] = \frac{\gamma}{\theta}$ เนื่องจากเรายังไม่ทราบค่าจริงของ θ เราจึงใช้วิธีของเบย์ซึ่งขึ้นอยู่กับข้อมูลค่าสังเกตเพื่อกำหนดพารามิเตอร์ความเสี่ยง (θ) ค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังสำหรับการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนักสามารถเขียนอยู่ในรูปต่อไปนี้

$$\hat{y} = E[y_1, y_2, \dots, y_N]$$

จาก $E[Y|\theta] = \frac{\gamma}{\theta}$ สามารถเขียนสูตรสำหรับ $E[y_1, y_2, \dots, y_N|\theta] = \frac{\gamma}{\theta}$ ใหม่ได้เป็น

$$E[y_1, y_2, \dots, y_N|\theta] = \gamma \cdot \frac{\left(\frac{1}{(S + \tau)^{\gamma N + 1}} - \frac{1}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 1}} - \frac{\tau\epsilon(\gamma N + 1)}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 2}} \right)}{(\gamma N + 1) \left(\frac{1}{(S + \tau)^{\gamma N + 2}} - \frac{1}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 2}} - \frac{\tau\epsilon(\gamma N + 2)}{(S + \tau + \tau\epsilon)^{\gamma N + 3}} \right)} \quad (4.41)$$

เบี้ยประกันภัยของผู้ถือกรมธรรม์แต่ละรายควรเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของพวกเขา หมายความว่าผู้ถือกรมธรรม์ที่มีมูลค่าในการเรียกร้อง

ค่าสินไหมทดแทนที่แตกต่างกันจะส่งผลต่อการจ่ายเบี้ยประกันที่ต่างกันด้วย ถึงแม้ว่าจะมีจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเท่ากัน เพื่อความเป็นธรรมระหว่างผู้ถือกรมธรรม์แต่ละคน ในการคำนวณเบี้ยประกันภัยแบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันจึงควรคำนึงทั้งจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนร่วมกัน เบี้ยประกันนี้คำนวณจากผลคูณของส่วนประกอบของจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนและส่วนประกอบของมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \text{Premium}_{t+1} = & \frac{(N+1)}{\left(\frac{1}{(t+\alpha)^{N+1}} - \frac{1}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+1}} - \frac{\alpha\beta(N+1)}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+2}} \right)} \left(\frac{1}{(t+\alpha)^{N+2}} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+2}} - \frac{\alpha\beta(N+2)}{(t+\alpha+\alpha\beta)^{N+3}} \right) \\
 & \cdot \gamma \frac{\left(\frac{1}{(S+\tau)^{\gamma N+1}} - \frac{1}{(S+\tau+\tau\epsilon)^{\gamma N+1}} - \frac{\tau\epsilon(\gamma N+1)}{(S+\tau+\tau\epsilon)^{\gamma N+2}} \right)}{(\gamma N+1) \left(\frac{1}{(S+\tau)^{\gamma N+2}} - \frac{1}{(S+\tau+\tau\epsilon)^{\gamma N+2}} - \frac{\tau\epsilon(\gamma N+2)}{(S+\tau+\tau\epsilon)^{\gamma N+3}} \right)}
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

โดยที่ $S = \sum_{j=1}^N y_j$, $N = \sum_{i=1}^t x_i$ และ $\alpha, \beta, \gamma, \tau, \epsilon > 0$

4.2.4 ตัวแบบคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย (BMS) โดยพิจารณาองค์ประกอบจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนภายใต้ฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (PACRTE) และฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (GACRTE)

ในหัวข้อ 4.2.2 ได้กำหนดจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้ถือกรมธรรม์ในระยะเวลา t ปี ซึ่งสามารถแสดงเป็นผลรวมของจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนแต่ละบุคคลได้เป็น $N = \sum_{i=1}^t x_i$ มูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนแต่ละครั้งจะแทนด้วย y_j โดยที่ $j = 1, 2, \dots, N$ หรือแสดงในรูปเวกเตอร์ $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ ดังนั้นมูลค่ารวมของการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้ถือกรมธรรม์ในช่วง t ปี จะแทนด้วย $S = \sum_{j=1}^N y_j$

$$L(y_1, y_2, \dots, y_N | \gamma, \theta) = f(y_1, y_2, \dots, y_N | \gamma, \theta)$$

$$= \prod_{j=1}^N \frac{\theta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} y_k^{\gamma-1} e^{-\theta y}$$

$$= \left(\frac{\theta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \right)^N \prod_{j=1}^N y_k^{\gamma-1} e^{-\theta \sum_{j=1}^N y_k} \propto \theta^{\gamma N} e^{-\theta S} \quad (4.43)$$

พิจารณาฟังก์ชันการแจกแจงเลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (GACRTE) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงก่อน จะได้

$$g(\theta) = \delta e^{-\delta\theta} (1 - e^{-q^2} + 6e^{-q^2-\delta\theta} - 6e^{-q^2-2\delta\theta}) \propto e^{-\delta\theta} (1 - e^{-q^2} + 6e^{-q^2-\delta\theta} - 6e^{-q^2-2\delta\theta}) \quad (4.44)$$

ใช้ทฤษฎีบทของเบย์ในการหาฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังสำหรับผู้ถือกรรมสิทธิ์ซึ่งมีข้อมูลประวัติการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน $y_1, y_2, \dots, y_N$ ฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังเป็นสัดส่วนโดยตรงกับฟังก์ชันการแจกแจงก่อนหน้าคูณด้วยฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} g(\theta|y_1, y_2, \dots, y_N) &\propto f(y_1, y_2, \dots, y_N|\gamma, \theta) g(\theta) \\ &\propto \theta^{\gamma N} e^{-\theta S} \cdot e^{-\delta\theta} (1 - e^{-q^2} + 6e^{-q^2-\delta\theta} - 6e^{-q^2-2\delta\theta}) \\ &\propto \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\delta)} (1 - e^{-q^2} + 6e^{-q^2-\delta\theta} - 6e^{-q^2-2\delta\theta}) \\ &\propto (\theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\delta)}) - (e^{-q^2} \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\delta)}) + (6e^{-q^2} \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+2\delta)}) \\ &\quad - (6e^{-q^2} \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+3\delta)}) \end{aligned}$$

พิจารณา

$$\int_0^\infty g^*(\theta|y_1, y_2, \dots, y_t) d\theta \propto \int_0^\infty ((\theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\delta)}) - (e^{-q^2} \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\delta)}) + (6e^{-q^2} \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+2\delta)}) - (6e^{-q^2} \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+3\delta)})) d\theta$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g^*(\theta|y_1, y_2, \dots, y_t) d\theta &= \int_0^\infty C((\theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\delta)}) - (e^{-q^2} \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\delta)}) + (6e^{-q^2} \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+2\delta)}) - (6e^{-q^2} \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+3\delta)})) d\theta \\ &= 1 \end{aligned}$$

โดยที่ C เป็นค่าคงที่

พิจารณา

$$C \left(\int_0^\infty \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\delta)} d\theta - e^{-q^2} \int_0^\infty \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\delta)} d\theta + e^{-q^2} \int_0^\infty \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+2\delta)} d\theta - e^{-q^2} \int_0^\infty \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+3\delta)} d\theta \right) = 1$$

$$C \left(\int_0^\infty \left(\frac{u}{(S+\delta)} \right)^{\gamma N} e^{-u} \frac{du}{(S+\delta)} - e^{-q^2} \int_0^\infty \left(\frac{u}{(S+\delta)} \right)^{\gamma N} e^{-u} \frac{du}{(S+\delta)} + 6e^{-q^2} \int_0^\infty \left(\frac{u}{(S+2\delta)} \right)^{\gamma N} e^{-u} \frac{du}{(S+2\delta)} - 6e^{-q^2} \int_0^\infty \left(\frac{u}{(S+3\delta)} \right)^{\gamma N} e^{-u} \frac{du}{(S+3\delta)} \right) = 1$$

$$C \left(\frac{\Gamma(\gamma N + 1)}{(S+\delta)^{\gamma N+1}} - \frac{e^{-q^2} \Gamma(\gamma N + 1)}{(S+\delta)^{\gamma N+1}} + \frac{6e^{-q^2} \Gamma(\gamma N + 1)}{(S+2\delta)^{\gamma N+1}} - \frac{6e^{-q^2} \Gamma(\gamma N + 1)}{(S+3\delta)^{\gamma N+1}} \right) = 1$$

$$C\Gamma(\gamma N + 1) \left(\frac{1}{(S+\delta)^{\gamma N+1}} - \frac{e^{-q^2}}{(S+\delta)^{\gamma N+1}} + \frac{6e^{-q^2}}{(S+2\delta)^{\gamma N+1}} - \frac{6e^{-q^2}}{(S+3\delta)^{\gamma N+1}} \right) = 1$$

จะได้

$$C = \frac{1}{\Gamma(\gamma N + 1) \left(\frac{1}{(S+\delta)^{\gamma N+1}} - \frac{e^{-q^2}}{(S+\delta)^{\gamma N+1}} + \frac{6e^{-q^2}}{(S+2\delta)^{\gamma N+1}} - \frac{6e^{-q^2}}{(S+3\delta)^{\gamma N+1}} \right)}$$

ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังของการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับสำหรับองค์ประกอบมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} g^*(\theta|y_1, y_2, \dots, y_N) \\ = \frac{(\theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\delta)}) - (e^{-q^2} \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+\delta)}) + (6e^{-q^2} \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+2\delta)}) - (6e^{-q^2} \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S+3\delta)})}{\Gamma(\gamma N + 1) \left(\frac{1}{(S+\delta)^{\gamma N+1}} - \frac{e^{-q^2}}{(S+\delta)^{\gamma N+1}} + \frac{6e^{-q^2}}{(S+2\delta)^{\gamma N+1}} - \frac{6e^{-q^2}}{(S+3\delta)^{\gamma N+1}} \right)} \end{aligned} \quad (4.45)$$

ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียแบบกำลังสอง ตัวประมาณแบบเบย์จะเท่ากับค่าคาดหวังของพารามิเตอร์ θ ภายใต้ฟังก์ชันการแจกแจงหลัง เบี้ยประกันสุทธิ (Net premium) แสดงถึงมูลค่าที่คาดว่าจะเกิดการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้ถือกรมธรรม์ ให้ $\hat{\theta}_{t+1}$ แทนมูลค่าเฉลี่ยของการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้ถือกรมธรรม์ที่มีประวัติการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน $y_1, y_2, \dots, y_N$ ค่านี้คำนวณจากค่าคาดหวังของฟังก์ชันการแจกแจงหลังของการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับดังนี้

$$\hat{\theta}_{t+1} = E[\theta|y_1, y_2, \dots, y_N]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\gamma N + 1) \left(\frac{1}{(S + \delta)^{\gamma N + 1}} - \frac{e^{-q^2}}{(S + \delta)^{\gamma N + 1}} + \frac{6e^{-q^2}}{(S + 2\delta)^{\gamma N + 1}} - \frac{6e^{-q^2}}{(S + 3\delta)^{\gamma N + 1}} \right)} \int_0^\infty \theta ((\theta^{\gamma N} e^{-\theta(S + \delta)} \\
&\quad - (e^{-q^2} \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S + \delta)}) + (6e^{-q^2} \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S + 2\delta)}) - (6e^{-q^2} \theta^{\gamma N} e^{-\theta(S + 3\delta)})) d\theta \\
&= \frac{1}{\Gamma(\gamma N + 1) \left(\frac{1}{(S + \delta)^{\gamma N + 1}} - \frac{e^{-q^2}}{(S + \delta)^{\gamma N + 1}} + \frac{6e^{-q^2}}{(S + 2\delta)^{\gamma N + 1}} - \frac{6e^{-q^2}}{(S + 3\delta)^{\gamma N + 1}} \right)} \int_0^\infty (\theta^{\gamma N + 1} e^{-\theta(S + \delta)} \\
&\quad - (e^{-q^2} \theta^{\gamma N + 1} e^{-\theta(S + \delta)}) + (6e^{-q^2} \theta^{\gamma N + 1} e^{-\theta(S + 2\delta)}) - (6e^{-q^2} \theta^{\gamma N + 1} e^{-\theta(S + 3\delta)})) d\theta \\
&= \frac{1}{\Gamma(\gamma N + 1) \left(\frac{1}{(S + \delta)^{\gamma N + 1}} - \frac{e^{-q^2}}{(S + \delta)^{\gamma N + 1}} + \frac{6e^{-q^2}}{(S + 2\delta)^{\gamma N + 1}} - \frac{6e^{-q^2}}{(S + 3\delta)^{\gamma N + 1}} \right)} \left(\int_0^\infty \theta^{\gamma N + 1} e^{-\theta(S + \delta)} d\theta \right. \\
&\quad \left. - e^{-q^2} \int_0^\infty \theta^{\gamma N + 1} e^{-\theta(S + \delta)} d\theta + e^{-q^2} \int_0^\infty \theta^{\gamma N + 1} e^{-\theta(S + 2\delta)} d\theta \right. \\
&\quad \left. - e^{-q^2} \int_0^\infty \theta^{\gamma N + 1} e^{-\theta(S + 3\delta)} d\theta \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\gamma N + 1) \left(\frac{1}{(S + \delta)^{\gamma N + 1}} - \frac{e^{-q^2}}{(S + \delta)^{\gamma N + 1}} + \frac{6e^{-q^2}}{(S + 2\delta)^{\gamma N + 1}} - \frac{6e^{-q^2}}{(S + 3\delta)^{\gamma N + 1}} \right)} \left(\int_0^\infty \left(\frac{u}{(S + \delta)} \right)^{\gamma N + 1} e^{-u} \frac{du}{(S + \delta)} \right. \\
&\quad \left. - e^{-q^2} \int_0^\infty \left(\frac{u}{(S + \delta)} \right)^{\gamma N + 1} e^{-u} \frac{du}{(S + \delta)} + 6e^{-q^2} \int_0^\infty \left(\frac{u}{(S + 2\delta)} \right)^{\gamma N + 1} e^{-u} \frac{du}{(S + 2\delta)} \right. \\
&\quad \left. - 6e^{-q^2} \int_0^\infty \left(\frac{u}{(S + 3\delta)} \right)^{\gamma N + 1} e^{-u} \frac{du}{(S + 3\delta)} \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\gamma N + 1) \left(\frac{1}{(S + \delta)^{\gamma N + 1}} - \frac{e^{-q^2}}{(S + \delta)^{\gamma N + 1}} + \frac{6e^{-q^2}}{(S + 2\delta)^{\gamma N + 1}} - \frac{6e^{-q^2}}{(S + 3\delta)^{\gamma N + 1}} \right)} \left(\frac{\Gamma(\gamma N + 2)}{(S + \delta)^{\gamma N + 2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{-q^2} \Gamma(\gamma N + 2)}{(S + \delta)^{\gamma N + 2}} + \frac{6e^{-q^2} \Gamma(\gamma N + 2)}{(S + 2\delta)^{\gamma N + 2}} - \frac{6e^{-q^2} \Gamma(\gamma N + 2)}{(S + 3\delta)^{\gamma N + 2}} \right) \\
&= \frac{\Gamma(\gamma N + 2)}{\Gamma(\gamma N + 1) \left(\frac{1}{(S + \delta)^{\gamma N + 1}} - \frac{e^{-q^2}}{(S + \delta)^{\gamma N + 1}} + \frac{6e^{-q^2}}{(S + 2\delta)^{\gamma N + 1}} - \frac{6e^{-q^2}}{(S + 3\delta)^{\gamma N + 1}} \right)} \left(\frac{1}{(S + \delta)^{\gamma N + 2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{-q^2}}{(S + \delta)^{\gamma N + 2}} + \frac{6e^{-q^2}}{(S + 2\delta)^{\gamma N + 2}} - \frac{6e^{-q^2}}{(S + 3\delta)^{\gamma N + 2}} \right) \\
&= \frac{(\gamma N + 1)}{\left(\frac{1}{(S + \delta)^{\gamma N + 1}} - \frac{e^{-q^2}}{(S + \delta)^{\gamma N + 1}} + \frac{6e^{-q^2}}{(S + 2\delta)^{\gamma N + 1}} - \frac{6e^{-q^2}}{(S + 3\delta)^{\gamma N + 1}} \right)} \left(\frac{1}{(S + \delta)^{\gamma N + 2}} - \frac{e^{-q^2}}{(S + \delta)^{\gamma N + 2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{6e^{-q^2}}{(S + 2\delta)^{\gamma N + 2}} - \frac{6e^{-q^2}}{(S + 3\delta)^{\gamma N + 2}} \right)
\end{aligned}$$

เป็นที่ทราบว่าคุณค่าความหมายของตัวแปรสุ่มแบบแกมมา คือ $\frac{\gamma}{\theta}$ เขียนแทนด้วย $E[Y|\theta] = \frac{\gamma}{\theta}$ เนื่องจากเรายังไม่ทราบค่าจริงของ θ เราจึงใช้วิธีของเบย์ซึ่งขึ้นอยู่กับข้อมูลค่าสังเกตเพื่อกำหนดพารามิเตอร์ความเสี่ยง (θ) ค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังสำหรับการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับสามารถเขียนอยู่ในรูปต่อไปนี้

$$\hat{y} = E[y_1, y_2, \dots, y_N]$$

จาก $E[Y|\theta] = \frac{\gamma}{\theta}$ สามารถเขียนสูตรสำหรับ $E[y_1, y_2, \dots, y_N|\theta] = \frac{\gamma}{\theta}$ ใหม่ได้เป็น

$$E[y_1, y_2, \dots, y_N|\theta] = \gamma \cdot \frac{\left(\frac{1}{(S+\delta)^{N+1}} - \frac{e^{-q^2}}{(S+\delta)^{N+1}} + \frac{6e^{-q^2}}{(S+2\delta)^{N+1}} - \frac{6e^{-q^2}}{(S+3\delta)^{N+1}} \right)}{(\gamma N + 1) \left(\frac{1}{(S+\delta)^{N+2}} - \frac{e^{-q^2}}{(S+\delta)^{N+2}} + \frac{6e^{-q^2}}{(S+2\delta)^{N+2}} - \frac{6e^{-q^2}}{(S+3\delta)^{N+2}} \right)} \quad (4.46)$$

เบี้ยประกันภัยของผู้ถือกรมธรรม์แต่ละรายควรเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของพวกเขา หมายความว่าผู้ถือกรมธรรม์ที่มีมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนที่ต่างกันจะส่งผลต่อการจ่ายเบี้ยประกันที่ต่างกันด้วย ถึงแม้ว่าจะมีจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเท่ากัน เพื่อความเป็นธรรมระหว่างผู้ถือกรมธรรม์แต่ละคน ในการคำนวณเบี้ยประกันภัยแบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันจึงควรคำนึงทั้งจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนร่วมกัน เบี้ยประกันนี้คำนวณจากผลคูณของส่วนประกอบของจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนและส่วนประกอบของมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{Premium}_{t+1} = & \frac{(N+1) \left(\frac{1}{(t+\theta)^{N+2}} - \frac{e^{-p^2}}{(t+\theta)^{N+2}} + \frac{6e^{-p^2}}{(t+2\theta)^{N+2}} - \frac{6e^{-p^2}}{(t+3\theta)^{N+2}} \right)}{\left(\frac{1}{(t+\theta)^{N+1}} - \frac{e^{-p^2}}{(t+\theta)^{N+1}} + \frac{6e^{-p^2}}{(t+2\theta)^{N+1}} - \frac{6e^{-p^2}}{(t+3\theta)^{N+1}} \right)} \\ & \cdot \gamma \frac{\left(\frac{1}{(S+\delta)^{N+1}} - \frac{e^{-q^2}}{(S+\delta)^{N+1}} + \frac{6e^{-q^2}}{(S+2\delta)^{N+1}} - \frac{6e^{-q^2}}{(S+3\delta)^{N+1}} \right)}{(\gamma N + 1) \left(\frac{1}{(S+\delta)^{N+2}} - \frac{e^{-q^2}}{(S+\delta)^{N+2}} + \frac{6e^{-q^2}}{(S+2\delta)^{N+2}} - \frac{6e^{-q^2}}{(S+3\delta)^{N+2}} \right)} \end{aligned} \quad (4.47)$$

โดยที่ $S = \sum_{j=1}^N y_j$, $N = \sum_{i=1}^t x_i$ และ $\theta, \gamma, \delta > 0, p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}$

4.2.5 การกำหนดราคาเบี้ยประกัน

การกำหนดราคาเบี้ยประกันภายใต้องค์ประกอบของจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

เมื่อทำการคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบแบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย สูตรในการคำนวณเบี้ยประกันภัยที่ได้จากวิธีของเบย์เซียน โดยพิจารณาจำนวนครั้งของการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเพียงอย่างเดียวแสดงดังตารางที่ 9 และ 10

ตารางที่ 9 แสดงเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยสำหรับจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนโดยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก

t	จำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน				
	0	1	2	3	4
0	100.00				
1	94.13	174.49	260.54	347.29	434.11
2	88.95	164.22	245.07	326.66	408.32
3	84.35	155.11	231.34	308.34	385.42
4	80.24	146.96	219.07	291.97	364.95
5	76.54	139.64	208.04	277.25	346.55
6	73.19	133.03	198.06	263.94	329.92
7	70.15	127.03	189.01	251.85	314.80

จากตารางที่ 9 จะเห็นได้ว่าผู้เอาประกันภัยที่ไม่มีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนในปีแรกจะได้รับโบนัสหรือส่วนลดเบี้ย 5.87% ของเบี้ยประกันภัยเริ่มต้น แต่ถ้าหากผู้เอาประกันภัยมีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนจำนวน 1 ครั้ง ในปีแรกจะต้องจ่ายเบี้ยประกันภัยเพิ่ม 74.49% ของเบี้ยประกันภัยเริ่มต้น จะสังเกตเห็นว่าเบี้ยประกันภัยจะลดลงเมื่อผู้เอาประกันภัยไม่มีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน (ให้รางวัล) และเบี้ยประกันจะเพิ่มขึ้นเมื่อผู้เอาประกันภัยมีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน (ปรับเบี้ยเพิ่ม)

นอกจากนี้งานวิจัยนี้ได้ทำการเปรียบเทียบเบี้ยประกันภัยแบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัยจากฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับซึ่งแสดงได้ดังตารางที่ 10

จากตารางที่ 10 จะเห็นได้ว่าผู้เอาประกันภัยที่ไม่มีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนในปีแรกจะได้รับโบนัสหรือส่วนลดเบี้ย 5.86% ของเบี้ยประกันภัยเริ่มต้น แต่ถ้าหากผู้เอาประกันภัยมีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนจำนวน 1 ครั้งในปีแรกจะต้องจ่ายเบี้ยประกันภัยเพิ่มขึ้น 73.88% ของเบี้ยประกันภัยเริ่มต้น เบี้ยประกันภัยแบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยประกันภัยที่คำนวณโดยใช้ ฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก ให้ส่วนลดเบี้ยประกันที่มากกว่าฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับเมื่อไม่มีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ในขณะที่เมื่อมีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเกิดขึ้นเบี้ยประกันภัยจากฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก จะมีส่วนเพิ่มของเบี้ยประกันภัยมากกว่าฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ ในกรณีที่ผู้เอาประกันภัยมีประวัติการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนในระดับต่ำ แต่หากผู้เอาประกันภัยมีประวัติการเรียกร้องค่าสินไหม

ทดแทนในระดับสูง เบี้ยประกันภัยจากฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก จะให้ส่วนเพิ่มของเบี้ยประกันภัยน้อยกว่าฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ นั่นหมายความว่าฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนักมีความผ่อนปรนสำหรับผู้เอาประกันภัยที่ไม่มีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนหรือประวัติการขับขี่ของการเกิดอุบัติเหตุบนท้องถนนที่สูงเมื่อระยะเวลาผ่านไป

เมื่อพิจารณาในบริบทของบริษัทประกันภัย ฟังก์ชันการแจกแจง 2 รูปแบบสามารถนำไปประยุกต์ใช้ เพื่อดึงดูดผู้เอาประกันภัยที่มีลักษณะของความเสียหายแตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับนโยบายการบริหารความเสี่ยงและกลุ่มเป้าหมายของแต่ละบริษัทประกันภัย

ตารางที่ 10 แสดงเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยสำหรับจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนโดยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ

t	จำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน				
	0	1	2	3	4
0	100.00				
1	94.14	173.88	264.50	365.23	471.20
2	89.02	163.23	246.56	339.13	437.12
3	84.49	153.98	231.11	316.61	407.57
4	80.45	145.86	217.66	297.02	381.73
5	76.81	138.68	205.86	279.84	358.99
6	73.51	132.26	195.41	264.67	338.85
7	70.51	126.48	186.10	251.17	320.91

การกำหนดราคาเบี้ยประกันภายใต้องค์ประกอบของจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนร่วมกัน

การคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบแบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย สูตรในการคำนวณเบี้ยประกันภัยที่ได้จากวิธีของเบย์เซียน โดยพิจารณาจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเพียงร่วมกันแสดงดังตารางที่ 11-14 ตามลำดับ

ตารางที่ 11 แสดงเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยสำหรับจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนโดยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก และมูลค่า

ในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนโดยฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก โดยมีมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนรวม $S=300$ AUD

t	จำนวนครั้งในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทน				
	0	1	2	3	4
0	104.14				
1	98.02	135.46	160.96	177.95	189.79
2	92.63	127.48	151.41	167.38	178.51
3	87.84	120.41	142.92	157.99	168.50
4	83.56	114.09	135.34	149.60	159.55
5	79.71	108.40	128.53	142.06	151.51
6	76.22	103.27	122.37	135.24	144.24
7	73.06	98.61	116.77	129.05	137.63

ตารางที่ 12 แสดงเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยสำหรับจำนวนครั้งในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนโดยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก และมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนโดยฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก โดยมีมูลค่าในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทนรวม $S=500$ AUD

t	จำนวนครั้งในการเรียกร้อยค่าสินไหมทดแทน				
	0	1	2	3	4
0	104.14				
1	98.02	141.96	168.75	186.63	199.12
2	92.63	133.61	158.73	175.54	187.29
3	87.84	126.19	149.84	165.70	176.79
4	83.56	119.57	141.89	156.90	167.40
5	79.71	113.61	134.75	148.99	158.96
6	76.22	108.23	128.29	141.84	151.33
7	73.06	103.35	122.42	135.34	144.40

ตารางที่ 13 แสดงเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยสำหรับจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนโดยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก และมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนโดยฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก โดยมีมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนรวม $S=1000$ AUD

t	จำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน				
	0	1	2	3	4
0	104.14				
1	98.02	158.19	188.17	208.24	222.34
2	92.63	148.88	177.00	195.87	209.13
3	87.84	140.61	167.08	184.89	197.40
4	83.56	133.23	158.22	175.07	186.92
5	79.71	126.60	150.25	166.24	177.50
6	76.22	120.60	143.05	158.27	168.97
7	73.06	115.16	136.51	151.02	161.24

จากตารางที่ 11-13 แสดงจำนวนเงินการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้เอาประกันภัยที่แตกต่างกัน ในการศึกษาจะพิจารณาจากกรณีที่ผู้เอาประกันภัยมีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนด้วยมูลค่ารวม $S = 300, 500$ และ $1,000$ AUD ตามลำดับ

ตาราง 11-13 แสดงเบี้ยประกันที่ต้องจ่ายของผู้เอาประกันภัย เมื่อพิจารณาทั้งจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนร่วมกัน สำหรับอายุกรมธรรม์เป็นระยะเวลา 7 ปี คำนวณเบี้ยประกันโดยใช้ฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนักสำหรับส่วนประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน และฟังก์ชันการแจกแจงเลขแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนักสำหรับส่วนประกอบมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน โดยเบี้ยประกันเริ่มต้นของผู้เอาประกันภัยทุกคนกำหนดไว้ที่ 104.14 AUD และเบี้ยประกันจะลดลงเมื่อไม่มีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน หากผู้เอาประกันภัยมีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนในปีแรกจำนวนหนึ่งครั้งด้วยมูลค่า 300 AUD ผู้เอาประกันภัยจะต้องจ่ายเบี้ยประกันเป็นเงิน 135.46 AUD ดังแสดงในตารางที่

ในปีที่สอง หากผู้เอาประกันภัยมีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนจำนวนหนึ่งครั้งด้วยมูลค่า 200 AUD เบี้ยประกันภัยจะเพิ่มขึ้นเป็น 158.73 AUD ดังแสดงในตารางที่ 1 นั่นคือเมื่อระยะเวลาผ่านไป 2 ปี ผู้เอาประกันภัยมีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนจำนวนรวม 2 ครั้ง ด้วยมูลค่ารวม 500 AUD

ต่อมาในปีที่สาม หากผู้เอาประกันภัยไม่มีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน เบี้ยประกันภัยจะลดลงเป็น 149.84 AUD ดังตารางที่ 2 นั่นคือเมื่อระยะเวลาผ่านไป 3 ปี ผู้เอาเอาประกันภัยมีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนจำนวนรวม 2 ครั้ง ด้วยมูลค่ารวม 500 AUD

ในปีที่สี่ หากผู้เอาประกันภัยมีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนจำนวน 2 ครั้งด้วยมูลค่า 200 AUD และ 300 AUD เบี้ยประกันภัยจะเพิ่มขึ้นเป็น 186.92 AUD ดังแสดงในตารางที่ 3 นั่นคือเมื่อระยะเวลาผ่านไป 4 ปีผู้เอาประกันภัยมีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนจำนวนรวม 4 ครั้ง ด้วยมูลค่ารวม 1000 AUD นอกจากนี้จากตาราง 11-13 จะเห็นได้ว่า เมื่อจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเพิ่มขึ้น ค่าเบี้ยประกันภัยก็เพิ่มขึ้นด้วย ในขณะที่มูลค่าการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเท่ากัน

ตารางที่ 14 แสดงเบี้ยประกันภัยใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยสำหรับจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนโดยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ และมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนโดยฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับโดยมีมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนรวม $S=300$ AUD

t	จำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน				
	0	1	2	3	4
0	100.68				
1	94.79	59.34	54.35	53.68	53.91
2	89.63	55.71	50.66	49.85	50.01
3	85.07	52.55	47.49	46.54	46.63
4	80.99	49.78	44.72	43.66	43.67
5	77.33	47.33	42.30	41.13	41.07
6	74.01	45.14	40.15	38.90	38.77
7	70.99	43.17	38.24	36.92	36.72

จากตารางที่ 14 แสดงเบี้ยประกันภัยที่ต้องจ่ายของผู้เอาประกันภัย เมื่อพิจารณาทั้งจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนร่วมกัน สำหรับอายุกรรมธรรมเป็นระยะเวลา 7 ปี คำนวณเบี้ยประกันภัยโดยใช้ฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับสำหรับส่วนประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน และฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับสำหรับส่วนประกอบมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน โดยเบี้ยประกันเริ่มต้นของผู้เอาประกันภัยทุกคนกำหนดไว้ที่ 100.68 AUD

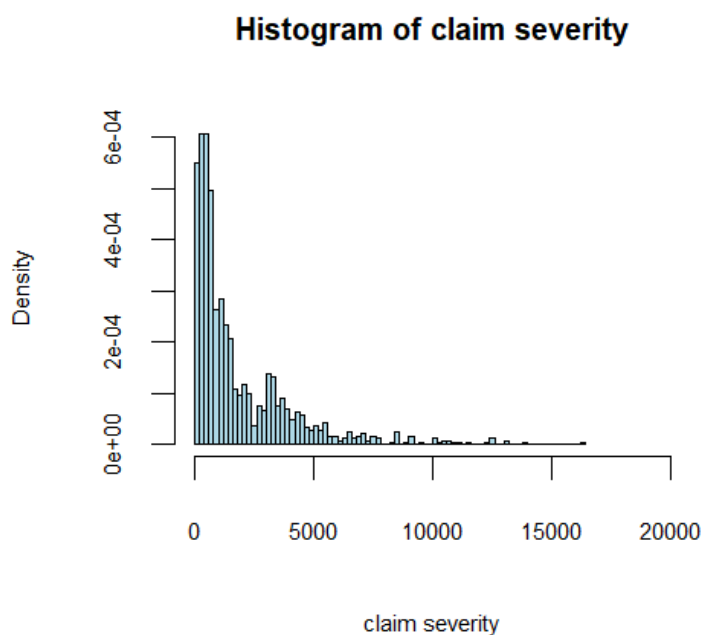
ภายใต้หลักการของระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย เบี้ยประกันภัยควรลดลงเมื่อผู้เอาประกันภัยไม่มีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน และควรเพิ่มขึ้นเมื่อมีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน อย่างไรก็ตาม ผลลัพธ์ที่แสดงในตารางที่ 14 พบว่าเบี้ยประกันภัยที่คำนวณได้ไม่เป็นไปตามรูปแบบดังกล่าว กล่าวคือเบี้ยประกันภัยมีแนวโน้มลดลงแม้ในกรณีที่มีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน หรือไม่เพิ่มขึ้นตามจำนวนครั้งและมูลค่าการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนอย่างเหมาะสม ความไม่สอดคล้องดังกล่าวอาจมีสาเหตุมาจากการที่ข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนไม่สามารถอธิบายได้อย่างเหมาะสมภายใต้ฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ ซึ่งสอดคล้องกับผลลัพธ์ที่ได้จากการทดสอบความเหมาะสมของแบบจำลองที่แสดงในตารางที่ 7 ส่งผลให้เมื่อรวมแบบจำลองของจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเข้าด้วยกัน เบี้ยประกันภัยที่ได้ไม่เป็นไปตามโครงสร้างของระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย

ดังนั้น อาจสรุปได้ว่าภายใต้ฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับสำหรับส่วนประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน และฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับสำหรับส่วนประกอบมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนร่วมกัน ยังไม่เหมาะสมสำหรับการนำไปประยุกต์ใช้ในการกำหนดเบี้ยภายใต้ระบบลดเบี้ยเพิ่มเบี้ยในอุตสาหกรรมประกันภัย

4.3 แบบจำลองในการประมาณค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายและการกำหนดเงินทุนเริ่มต้นขั้นต่ำของบริษัทประกันภัย

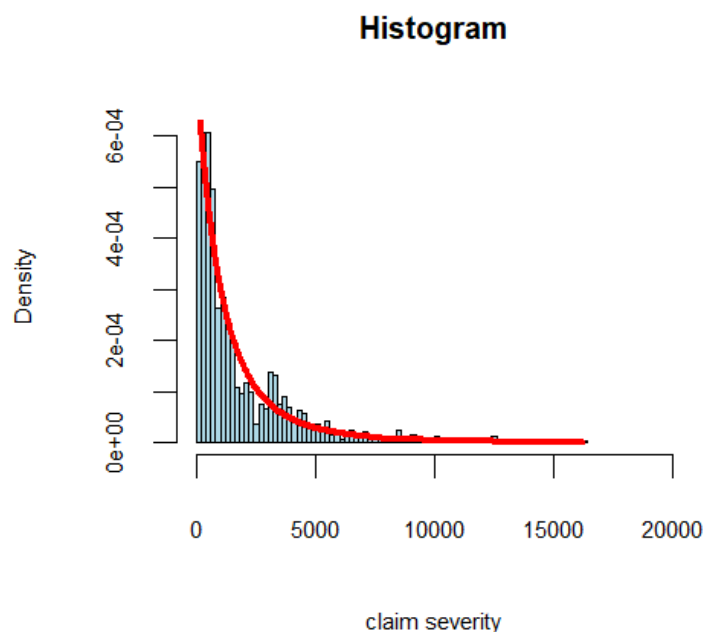
ข้อมูลที่ใช้ในการศึกษานี้เป็นข้อมูลที่มาจากกรรมธรรมประกันภัยรถยนต์ของบริษัทประกันภัยแห่งหนึ่งในประเทศออสเตรเลีย (ข้อมูลชุดที่4) โดยเป็นข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของลูกค้าที่มีประวัติการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนจำนวนทั้งสิ้น 1,200 ราย โดยเมื่อพิจารณาจากฮิสโตแกรมของความน่าจะเป็นของมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ดังภาพที่ 15 พบว่ามูลค่าใน

การเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนที่เกิดขึ้น โดยส่วนใหญ่มีมูลค่าน้อย และมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนที่มีมูลค่ามากจะมีโอกาสเกิดขึ้นได้น้อยมาก และจะสังเกตเห็นได้ว่ามูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนที่มีค่าสูงผิดปกติจากข้อมูลส่วนทั่วไปบางค่า อยู่ทางด้านขวามือของฮิสโตแกรม ซึ่งข้อมูลลักษณะนี้มีความสอดคล้องกับการแจกแจงแบบหางหนา เนื่องจากการแจกแจงแบบหางหนามักพบในเหตุการณ์ที่เกิดอุบัติเหตุรุนแรงแต่มีโอกาสดำเนินการได้ต่ำ เช่น ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับการเงินหรือภัยธรรมชาติ ดังนั้นในงานนี้จึงได้พิจารณาการแจกแจงที่มีลักษณะเป็นการแจกแจงแบบหางหนา ได้แก่ การแจกแจงแกมมา การแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก และการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ



ภาพที่ 15 ฮิสโตแกรมแสดงมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

ผลที่ได้จากการทดสอบความเหมาะสมของมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ที่แสดงดังตารางที่ 7 สรุปได้ว่าการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนักมีความเหมาะสมในการอธิบายข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน แต่การแจกแจงแกมมา และการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ ไม่มีความเหมาะสมในการอธิบายข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน



ภาพที่ 16 ฮิสโตแกรมของมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนเปรียบเทียบกับเส้นโค้งการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก

ดังนั้นผู้วิจัยจึงเลือกการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนักมาใช้ในการจำลองข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนแบบรายวันในกรณี 1 ปี 3 ปี และ 5 ปี เพื่อใช้ในการคำนวณความน่าจะเป็นในการล้มละลายและศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเงินทุนเริ่มต้นกับความน่าจะเป็นในการล้มละลาย

4.3.1 การประมาณค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลาย

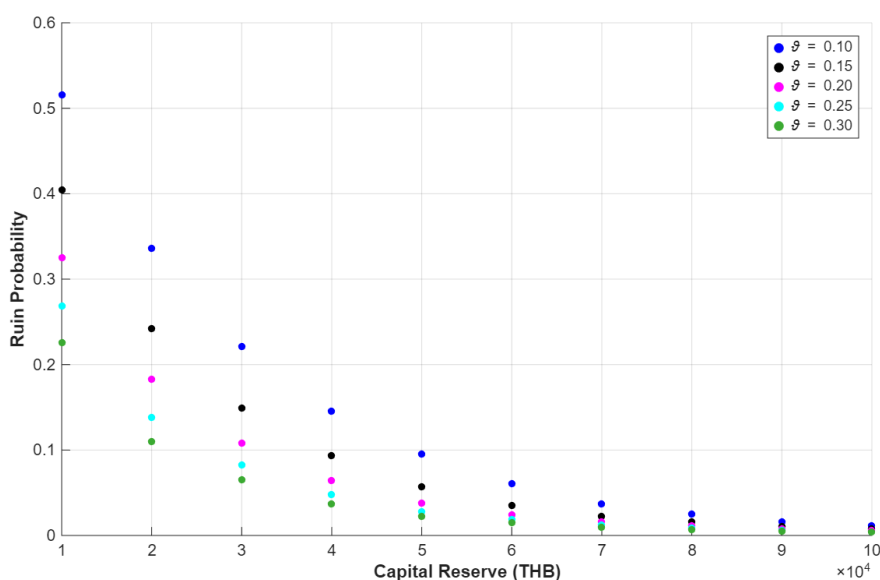
ทำการจำลองข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน $y_1, y_2, \dots, y_n$ ภายใต้การแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนักด้วยพารามิเตอร์ $\gamma = 1.01, \tau = 3335.3222$ และ $\epsilon = 0.3030$ การจำลองข้อมูลดำเนินการด้วยวิธี Acceptance-rejection ซึ่งถูกจำลองภายใต้ระยะเวลา 1 ปี ($n=365$) 3 ปี ($n=1,095$) และ 5 ปี ($n=1,825$) เมื่อ n แทนจำนวนวันที่กำหนด ทั้งนี้จะมีการทำซ้ำจำนวน 10,000 รอบในแต่ละกรณี สำหรับการกำหนดเงินทุนเริ่มต้น (u) สำหรับการคำนวณความน่าจะเป็นในการล้มละลายมีค่าเท่ากับ 10000, 20000, 30000, ..., 100000 บาท และค่าเพื่อความปลอดภัยเท่ากับ 0.10, 0.15, 0.20, ..., 0.30 ภายใต้ความเสี่ยงที่ยอมรับได้มีค่า

เท่ากับ 0.01, 0.05 และ 0.10 ตามลำดับ ซึ่งสามารถแสดงผลลัพธ์ของกระบวนการส่วนเกินสำหรับกรณี $n = 365, 1,095$ และ $1,825$ ได้ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 15 ค่าประมาณความน่าจะเป็นล้มละลายสำหรับกระบวนการส่วนเกินเวลา 1 ปี

เงินทุนเริ่มต้น	ค่าเพื่อความปลอดภัย(๗)				
	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
10,000	0.5161	0.4041	0.3251	0.2686	0.2259
20,000	0.3357	0.2419	0.1825	0.1382	0.1102
30,000	0.2214	0.1490	0.1084	0.0821	0.0656
40,000	0.1450	0.0936	0.0642	0.0476	0.0373
50,000	0.0955	0.0568	0.0382	0.0280	0.0221
60,000	0.0607	0.0354	0.0241	0.0185	0.0146
70,000	0.0369	0.0223	0.0162	0.0123	0.0099
80,000	0.0247	0.0159	0.0115	0.0085	0.0068
90,000	0.0163	0.0107	0.0078	0.0062	0.0051
100,000	0.0110	0.0076	0.0057	0.0045	0.0039

จากตารางที่ 15 แสดงผลของการประมาณค่าความน่าจะเป็นล้มละลายสำหรับกระบวนการส่วนเกินเวลา 1 ปี พบว่าเมื่อค่าเพื่อความปลอดภัย (Safety loading) เพิ่มขึ้น ค่าประมาณของความน่าจะเป็นในการล้มละลายมีแนวโน้มลดลงอย่างสม่ำเสมอในทุกระดับของเงินทุนเริ่มต้น แต่เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของเงินทุนเริ่มต้นทั้ง 10 กรณี พบว่าเมื่อเงินทุนเริ่มต้นเพิ่มขึ้น ค่าประมาณของความน่าจะเป็นในการล้มละลายจะลดลงเช่นเดียวกัน แสดงให้เห็นว่าทั้งค่าเพื่อความปลอดภัยและเงินทุนเริ่มต้นเป็นปัจจัยสำคัญที่ช่วยลดความเสี่ยงในการล้มละลายของบริษัทประกันภัย



ภาพที่ 17 ความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการล้มละลายและเงินทุนเริ่มต้นกรณี 1 ปี

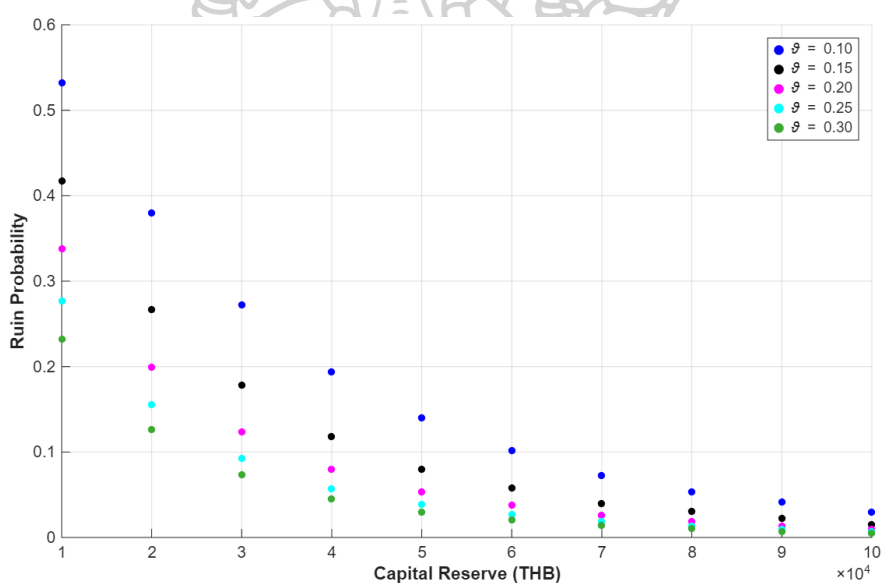
จากภาพที่ 17 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการล้มละลายและเงินทุนเริ่มต้นสำหรับข้อมูลที่จำลองโดยใช้วิธี Acceptance-rejection กรณี 1 ปี ณ ค่าเพื่อความปลอดภัยที่เท่ากับ 0.10, 0.15, 0.20, 0.25 และ 0.30 พบว่าความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการล้มละลายและเงินทุนเริ่มต้นสอดคล้องกับความสัมพันธ์เชิงเส้นโค้ง เมื่อค่าเงินทุนเริ่มต้นมีค่าเพิ่มขึ้น พบว่าค่าประมาณความน่าจะเป็นในการล้มละลายจะลดลงทุกกรณีของค่าเพื่อความปลอดภัยทั้ง 5 กรณี และเมื่อค่าเพื่อความปลอดภัยมีค่าเพิ่มขึ้น พบว่าค่าประมาณความน่าจะเป็นในการล้มละลายจะมีค่าลดลงทุกกรณีของปริมาณเงินทุนเริ่มต้นทั้ง 10 กรณี

ตารางที่ 16 ค่าประมาณความน่าจะเป็นล้มละลายสำหรับกระบวนการส่วนเกินเวลา 3 ปี

เงินทุนเริ่มต้น	ค่าเพื่อความปลอดภัย(θ)				
	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
10,000	0.5320	0.4168	0.3374	0.2772	0.2319
20,000	0.3796	0.2664	0.1994	0.1554	0.1259
30,000	0.2718	0.1781	0.1232	0.0930	0.0732
40,000	0.1935	0.1182	0.0801	0.0574	0.0448
50,000	0.1400	0.0801	0.0534	0.0391	0.0293
60,000	0.1021	0.0575	0.0382	0.0269	0.0207

70,000	0.0724	0.0399	0.0264	0.0183	0.0141
80,000	0.0533	0.0303	0.0190	0.0133	0.0108
90,000	0.0411	0.0226	0.0134	0.0095	0.0071
100,000	0.0300	0.0151	0.0095	0.0070	0.0054

จากตารางที่ 16 แสดงผลของการประมาณค่าความน่าจะเป็นล้มละลายสำหรับกระบวนการส่วนเกินเวลา 3 ปี พบว่าเมื่อค่าเผื่อความปลอดภัย (Safety loading) เพิ่มขึ้น ค่าประมาณของความน่าจะเป็นในการล้มละลายมีแนวโน้มลดลงอย่างสม่ำเสมอในทุกระดับของเงินทุนเริ่มต้น แต่เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของเงินทุนเริ่มต้นทั้ง 10 กรณี พบว่าเมื่อเงินทุนเริ่มต้นเพิ่มขึ้น ค่าประมาณของความน่าจะเป็นในการล้มละลายจะลดลงเช่นกัน แสดงให้เห็นว่าทั้งค่าเผื่อความปลอดภัยและเงินทุนเริ่มต้นเป็นปัจจัยสำคัญที่ช่วยลดความเสี่ยงในการล้มละลายของบริษัทประกันภัย



ภาพที่ 18 ความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการล้มละลายและเงินทุนเริ่มต้นกรณี 3 ปี

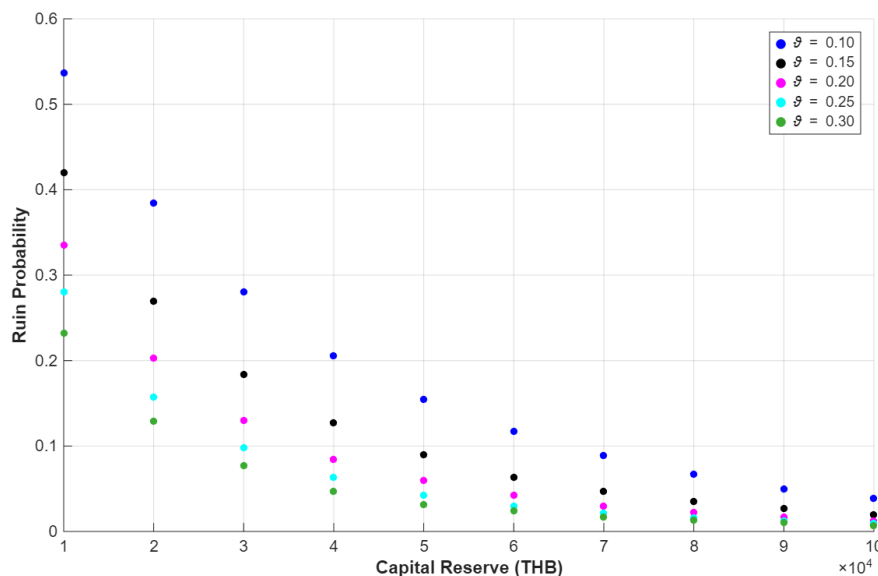
จากภาพที่ 18 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการล้มละลายและเงินทุนเริ่มต้นสำหรับข้อมูลที่จำลองโดยใช้วิธี Acceptance-rejection กรณี 3 ปี ณ ค่าเผื่อความปลอดภัยที่เท่ากับ 0.10, 0.15, 0.20, 0.25 และ 0.30 พบว่าความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการล้มละลายและเงินทุนเริ่มต้นสอดคล้องกับความสัมพันธ์เชิงเส้นโค้ง เมื่อค่าเงินทุนเริ่มต้นมีค่าเพิ่มขึ้น พบว่าค่าประมาณความน่าจะเป็นในการล้มละลายจะลดลงทุกกรณีของค่าเผื่อความปลอดภัยทั้ง 5 กรณี

และเมื่อค่าเผื่อความปลอดภัยมีค่าเพิ่มขึ้น พบว่าค่าประมาณความน่าจะเป็นในการล้มละลายจะมีค่าลดลงทุกกรณีของปริมาณเงินทุนเริ่มต้นทั้ง 10 กรณี

ตารางที่ 17 ค่าประมาณความน่าจะเป็นล้มละลายสำหรับกระบวนการส่วนเกินเวลา 5 ปี

เงินทุนเริ่มต้น	ค่าเผื่อความปลอดภัย(๗)				
	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
10,000	0.5363	0.4200	0.3350	0.2800	0.2321
20,000	0.3848	0.2694	0.2027	0.1573	0.1286
30,000	0.2802	0.1833	0.1301	0.0983	0.0767
40,000	0.2052	0.1268	0.0846	0.0631	0.0472
50,000	0.1545	0.0900	0.0600	0.0423	0.0317
60,000	0.1174	0.0636	0.0427	0.0297	0.0238
70,000	0.0885	0.0474	0.0297	0.0214	0.0168
80,000	0.0668	0.0352	0.0221	0.0162	0.0133
90,000	0.0500	0.0269	0.0172	0.0124	0.0103
100,000	0.0385	0.0196	0.0127	0.0093	0.0072

จากตารางที่ 17 แสดงผลของการประมาณค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายสำหรับกระบวนการส่วนเกินเวลา 5 ปี พบว่าเมื่อค่าเผื่อความปลอดภัย (Safety loading) เพิ่มขึ้น ค่าประมาณของความน่าจะเป็นในการล้มละลายมีแนวโน้มลดลงอย่างสม่ำเสมอในทุกระดับของเงินทุนเริ่มต้น แต่เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของเงินทุนเริ่มต้นทั้ง 10 กรณี พบว่าเมื่อเงินทุนเริ่มต้นเพิ่มขึ้น ค่าประมาณของความน่าจะเป็นในการล้มละลายจะลดลงเช่นเดียวกัน แสดงให้เห็นว่าทั้งค่าเผื่อความปลอดภัยและเงินทุนเริ่มต้นเป็นปัจจัยสำคัญที่ช่วยลดความเสี่ยงในการล้มละลายของบริษัทประกันภัย



ภาพที่ 19 ความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการล้มละลายและเงินทุนเริ่มต้นกรณี 5 ปี

จากภาพที่ 19 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการล้มละลายและเงินทุนเริ่มต้นสำหรับข้อมูลที่จำลองโดยใช้วิธี Acceptance-rejection กรณี 5 ปี ณ ค่าเพื่อความปลอดภัยที่เท่ากับ 0.10, 0.15, 0.20, 0.25 และ 0.30 พบว่าความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการล้มละลายและเงินทุนเริ่มต้นสอดคล้องกับความสัมพันธ์เชิงเส้นโค้ง เมื่อค่าเงินทุนเริ่มต้นมีค่าเพิ่มขึ้น พบว่าค่าประมาณความน่าจะเป็นในการล้มละลายจะลดลงทุกกรณีของค่าเพื่อความปลอดภัยทั้ง 5 กรณี และเมื่อค่าเพื่อความปลอดภัยมีค่าเพิ่มขึ้น พบว่าค่าประมาณความน่าจะเป็นในการล้มละลายจะมีค่าลดลงทุกกรณีของปริมาณเงินทุนเริ่มต้นทั้ง 10 กรณี

4.3.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายกับเงินทุนเริ่มต้น

จากภาพที่ 17-19 จะเห็นได้ว่าความสัมพันธ์ระหว่างเงินทุนเริ่มต้นและความน่าจะเป็นในการล้มละลายเป็นความสัมพันธ์เชิงเส้นโค้งโดยที่แกน x แสดงค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลาย และแกน y แสดงค่าเงินทุนเริ่มต้นโดยเปลี่ยนแปลงค่า safety loading ระหว่าง 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30 ดังนั้นผู้วิจัยจึงใช้ความสัมพันธ์เชิงเส้นโค้งมาคำนวณค่าเงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุดภายใต้ระดับความเสี่ยงที่มากที่สุดที่ยอมรับได้ โดยฟังก์ชันเส้นโค้งที่ใช้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างเงินทุนเริ่มต้นและความน่าจะเป็นในการล้มละลายคือ ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ซึ่งแสดงดังสมการต่อไปนี้

$$\phi = \gamma e^{\delta u} \quad (4.48)$$

ทำการแปลงฟังก์ชันเลขชี้กำลังให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันเชิงเส้น จากนั้นพิจารณาฟังก์ชันดังกล่าวภายใต้หลักการถดถอยเชิงเส้นตรง และใช้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Squares method) เพื่อลดความซับซ้อนในการประมาณค่าพารามิเตอร์ โดยขั้นตอนการประมาณค่าพารามิเตอร์สามารถอธิบายได้ตามที่แสดงไว้ในบทที่ 2 หัวข้อที่ 10

เมื่อใช้ตัวประมาณพารามิเตอร์จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุดเพื่อหาพารามิเตอร์สำหรับฟังก์ชันเลขยกกำลังของเงินทุนเริ่มต้นในกรณี 1 ปี 3 ปี และ 5 ปี ค่าประมาณของพารามิเตอร์แสดงดังตารางที่ 18-20 ตามลำดับ

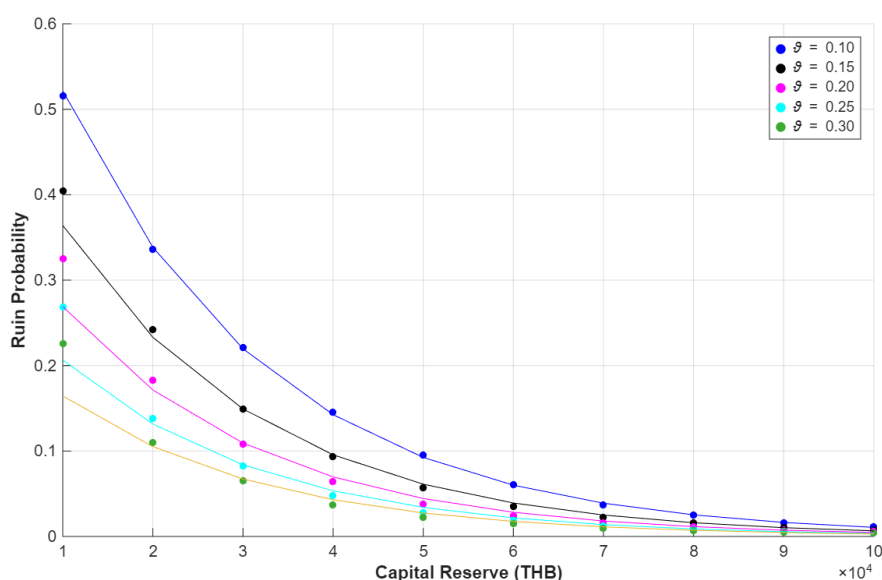
ตารางที่ 18 ค่าประมาณพารามิเตอร์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังสำหรับการคำนวณค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายกรณี 1 ปี

ค่าเพื่อความปลอดภัย (θ)	ค่าประมาณพารามิเตอร์		ค่าสัมประสิทธิ์แห่งการกำหนด (R^2)
	$\hat{\gamma}$	δ	
0.10	0.8032695	-0.0000432	0.9998
0.15	0.5683100	-0.0000446	0.9884
0.20	0.4216816	-0.0000450	0.9648
0.25	0.3238430	-0.0000451	0.9373
0.30	0.2570175	-0.0000447	0.9128

หมายเหตุ : ค่าสัมประสิทธิ์แห่งการกำหนด (Coefficient of Determination : R^2) แสดงถึงความสามารถของตัวแปรอิสระในการอธิบายความผันแปรของตัวแปรตาม

จากตารางที่ 18 แสดงผลของการประมาณค่าพารามิเตอร์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังสำหรับค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายกรณี 1 ปี พบว่าค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\gamma}$ มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 ค่าประมาณพารามิเตอร์ δ มีค่าน้อยกว่า 0 และค่า R^2 มีค่าอยู่ในช่วงตั้งแต่ 0.9128 ถึง 0.9998 สำหรับทุกกรณีของค่าเพื่อความปลอดภัยทั้ง 5 กรณี แสดงให้เห็นว่าเงินทุนเริ่มต้นสามารถอธิบายความผันแปรของค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายได้มากกว่า 90% ในทุกกรณี โดยผลลัพธ์จากตารางนี้สามารถนำมาเขียนสมการเลขชี้กำลังของเงินทุนเริ่มต้น (u) เมื่อฟังก์ชัน ϕ แทนความน่าจะเป็นในการล้มละลายดังสมการที่ 4.48 ได้ เช่น กรณีที่กำหนดค่าเพื่อความปลอดภัยมีค่าเท่ากับ 0.10 สำหรับข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน สามารถเขียนสมการเลขชี้กำลังได้คือ $\hat{y} =$

$0.8032695 e^{-0.0000432(u)}$ เมื่อค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\mu} = 0.8032695$ และค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\delta} = -0.0000432$ สำหรับทุกกรณีของค่าเพื่อความปลอดภัยทั้ง 5 กรณีสามารถเขียนสมการได้ในทำนองเดียวกัน



ภาพที่ 20 ความสัมพันธ์แบบเลขชี้กำลังระหว่างเงินทุนเริ่มต้นและความน่าจะเป็นในการล้มละลายกรณี 1 ปี

จากภาพที่ 20 แสดงความสัมพันธ์แบบเลขชี้กำลังระหว่างเงินทุนเริ่มต้นและความน่าจะเป็นในการล้มละลายกรณี 1 ปี โดยเส้นโค้งของแต่ละกรณีของค่าเพื่อความปลอดภัยมาจากการแทนมูลค่าเงินทุนเริ่มต้นลงในสมการที่ 4.48 ได้จากกรณีต่าง ๆ ของตารางที่ 18 จึงได้มาซึ่งค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลาย

ตารางที่ 19 ค่าประมาณพารามิเตอร์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังสำหรับการคำนวณค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายกรณี 3 ปี

ค่าเพื่อความปลอดภัย (θ)	ค่าประมาณพารามิเตอร์		ค่าสัมประสิทธิ์แห่งการกำหนด (R^2)
	$\hat{\mu}$	$\hat{\delta}$	
0.10	0.7095395	-0.0000320	0.9986
0.15	0.5335878	-0.0000361	0.9855
0.20	0.4176283	-0.0000388	0.9684
0.25	0.3293161	-0.0000401	0.9490

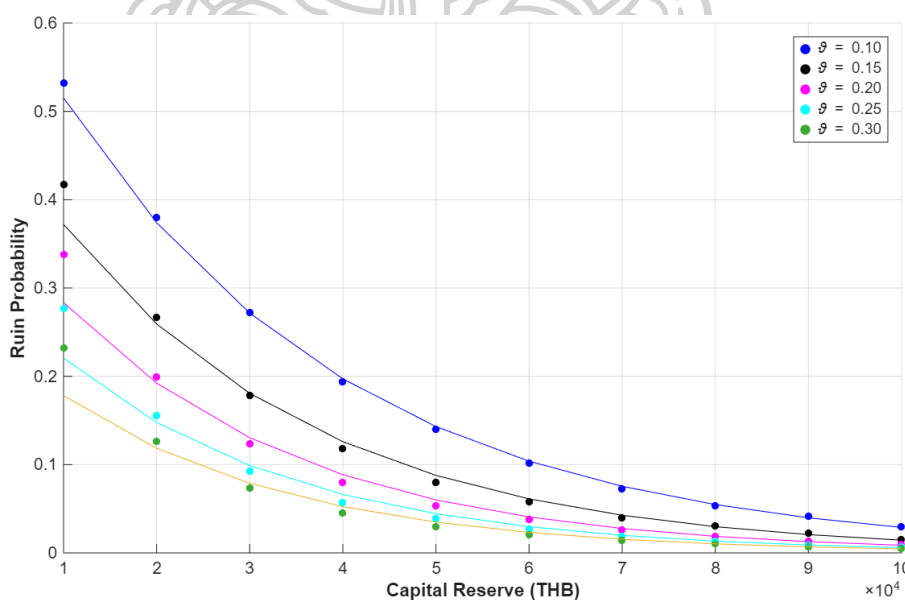
0.30

0.2679331

-0.0000408

0.9346

จากตารางที่ 19 แสดงผลของการประมาณค่าพารามิเตอร์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังสำหรับค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายกรณี 3 ปี พบว่าค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\gamma}$ มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 ค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\delta}$ มีค่าน้อยกว่า 0 และค่า R^2 มีค่าอยู่ในช่วงตั้งแต่ 0.9346 ถึง 0.9986 สำหรับทุกกรณีของค่าเพื่อความปลอดภัยทั้ง 5 กรณี แสดงให้เห็นว่าเงินทุนเริ่มต้นสามารถอธิบายความผันแปรของค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายได้มากกว่า 90% ในทุกกรณี โดยผลลัพธ์จากตารางนี้สามารถนำมาเขียนสมการเลขชี้กำลังของเงินทุนเริ่มต้น (u) เมื่อฟังก์ชัน ϕ แทนความน่าจะเป็นในการล้มละลายดังสมการที่ 4.48 ได้ เช่น กรณีที่กำหนดค่าเพื่อความปลอดภัยมีค่าเท่ากับ 0.10 สำหรับข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน สามารถเขียนสมการเลขชี้กำลังได้คือ $\hat{y} = 0.7095395 e^{-0.0000320(u)}$ เมื่อค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\gamma} = 0.7095395$ และค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\delta} = -0.0000320$ สำหรับทุกกรณีของค่าเพื่อความปลอดภัยทั้ง 5 กรณีสามารถเขียนสมการได้ในทำนองเดียวกัน



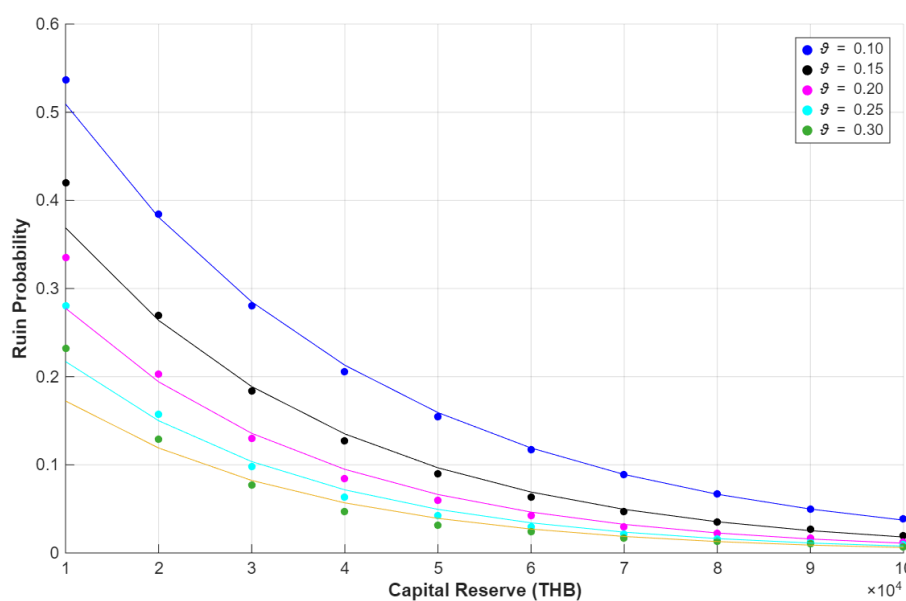
ภาพที่ 21 ความสัมพันธ์แบบเลขชี้กำลังระหว่างเงินทุนเริ่มต้นและความน่าจะเป็นในการล้มละลายกรณี 3 ปี

จากภาพที่ 21 แสดงความสัมพันธ์แบบเลขชี้กำลังระหว่างเงินทุนเริ่มต้นและความน่าจะเป็นในการล้มละลายกรณี 3 ปี โดยเส้นโค้งของแต่ละกรณีของค่าเพื่อความปลอดภัยมาจากการแทนมูลค่าเงินทุนเริ่มต้นลงในสมการที่ 4.48 ได้จากกรณีต่าง ๆ ของตารางที่ 19 จึงได้มาซึ่งค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลาย

ตารางที่ 20 ค่าประมาณพารามิเตอร์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังสำหรับการคำนวณค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายกรณี 5 ปี

ค่าเพื่อความปลอดภัย (θ)	ค่าประมาณพารามิเตอร์		ค่าสัมประสิทธิ์แห่งการกำหนด (R^2)
	$\hat{\mu}$	$\hat{\delta}$	
0.10	0.6810258	-0.0000291	0.9964
0.15	0.5154357	-0.0000335	0.9812
0.20	0.3971079	-0.0000358	0.9632
0.25	0.3143173	-0.0000370	0.9376
0.30	0.2495910	-0.0000370	0.9165

จากตารางที่ 20 แสดงผลของการประมาณค่าพารามิเตอร์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังสำหรับค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายกรณี 3 ปี พบว่าค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\mu}$ มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 ค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\delta}$ มีค่าน้อยกว่า 0 และค่า R^2 มีค่าอยู่ในช่วงตั้งแต่ 0.9165 ถึง 0.9964 สำหรับทุกกรณีของค่าเพื่อความปลอดภัยทั้ง 5 กรณี แสดงให้เห็นว่าเงินทุนเริ่มต้นสามารถอธิบายความผันแปรของค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายได้มากกว่า 90% ในทุกกรณี โดยผลลัพธ์จากตารางนี้สามารถนำมาเขียนสมการเลขชี้กำลังของเงินทุนเริ่มต้น (u) เมื่อฟังก์ชัน ϕ แทนความน่าจะเป็นในการล้มละลายดังสมการที่ 4.48 ได้ เช่น กรณีที่กำหนดค่าเพื่อความปลอดภัยมีค่าเท่ากับ 0.10 สำหรับข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน สามารถเขียนสมการเลขชี้กำลังได้คือ $\hat{y} = 0.7095395 e^{-0.0000320(u)}$ เมื่อค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\mu} = 0.7095395$ และค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\delta} = -0.0000320$ สำหรับทุกกรณีของค่าเพื่อความปลอดภัยทั้ง 5 กรณีสามารถเขียนสมการได้ในทำนองเดียวกัน



ภาพที่ 22 ความสัมพันธ์แบบเลขชี้กำลังระหว่างเงินทุนเริ่มต้นและความน่าจะเป็นในการล้มละลายกรณี 5 ปี

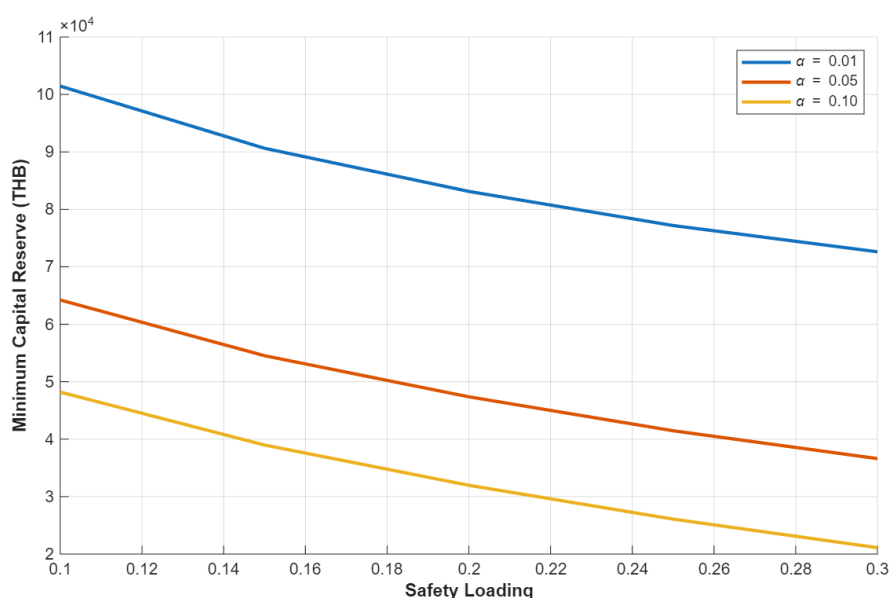
จากภาพที่ 22 แสดงความสัมพันธ์แบบเลขชี้กำลังระหว่างเงินทุนเริ่มต้นและความน่าจะเป็นในการล้มละลายกรณี 5 ปี โดยเส้นโค้งของแต่ละกรณีของค่าเพื่อความปลอดภัยมาจากการแทนมูลค่าเงินทุนเริ่มต้นลงในสมการที่ 4.48 ได้จากกรณีต่าง ๆ ของตารางที่ 20 จึงได้มาซึ่งค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลาย

4.3.3 การกำหนดเงินทุนเริ่มต้นที่ต่ำที่สุด

ตารางที่ 21 เงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุด (MIC) สำหรับกระบวนการส่วนเกินกรณี 1 ปี ($n = 365$)

ค่าเพื่อความปลอดภัย (θ)	เงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุด (MIC)		
	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$
0.10	101,451.07	64,224.61	48,192.04
0.15	90,629.28	54,525.51	38,976.46
0.20	83,125.30	47,369.83	31,970.79
0.25	77,183.02	41,463.37	26,079.76
0.30	72,614.57	36,616.88	21,113.51

จากตารางที่ 21 แสดงผลการคำนวณเงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุด (MIC) สำหรับกระบวนการส่วนเกินกรณี 1 ปี ภายใต้ค่าเพื่อความปลอดภัยและระดับความเสี่ยงที่ยอมรับได้แตกต่างกัน (α) พบว่าเมื่อค่าเพื่อความปลอดภัยเพิ่มขึ้นจะส่งผลให้ค่าเงินทุนเริ่มต้นมีแนวโน้มที่ลดลงในทุกระดับของความเสี่ยงที่ยอมรับได้ ในทางกลับกันเมื่อระดับความเสี่ยงที่ยอมรับได้มีค่าเพิ่มขึ้น พบว่าค่าเงินทุนเริ่มต้นจะลดลงในทุกระดับของค่าเพื่อความปลอดภัย



ภาพที่ 23 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเพื่อความปลอดภัยและเงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุดสำหรับกระบวนการส่วนเกินกรณี 1 ปี

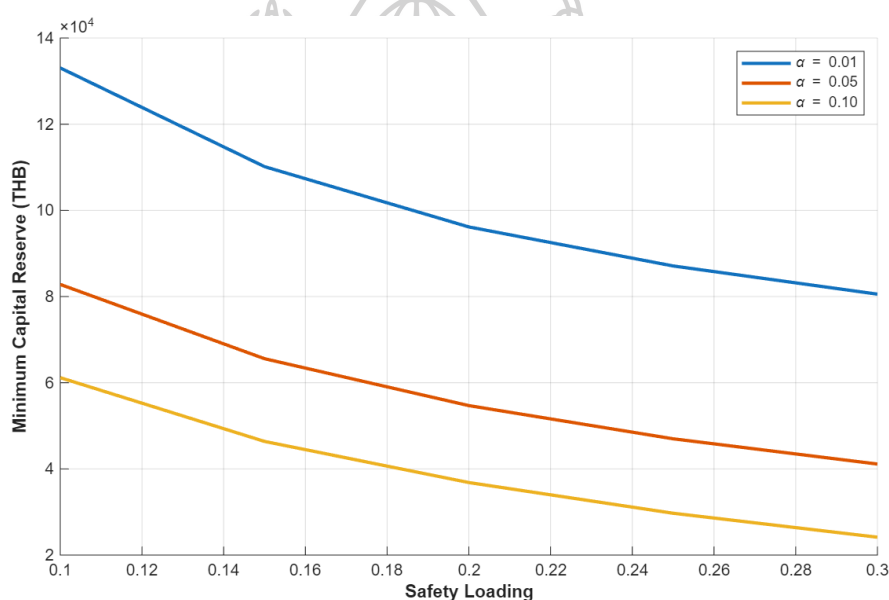
จากภาพที่ 23 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการล้มละลายและเงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุดกรณี 1 ปี ณ ค่า ค่าเพื่อความปลอดภัยที่เท่ากับ 0.10, 0.15, 0.20, 0.25 และ 0.30 พบว่าเมื่อค่าเพื่อความปลอดภัยมีค่าเพิ่มขึ้น เงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุดจะลดลงในทุกกรณีของระดับความเสี่ยงมากที่สุดที่ยอมรับได้ทั้ง 3 ระดับ นอกจากนี้ เมื่อระดับความเสี่ยงมากที่สุดที่ยอมรับได้มีค่าเพิ่มขึ้น จะส่งผลให้เงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุดลดลงในทุกระดับของค่าเพื่อความปลอดภัย

ตารางที่ 22 เงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุด (MIC) สำหรับกระบวนการส่วนเกินกรณี 3 ปี (n = 1,095)

ค่าเพื่อความปลอดภัย (๗)	เงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุด (MIC)		
	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$
0.10	133,059.09	82,813.02	61,173.21
0.15	110,146.87	65,572.36	46,375.16

0.20	96,153.05	54,686.79	36,828.24
0.25	87,096.84	46,982.48	29,706.16
0.30	80,555.21	41,126.19	24,145.04

จากตารางที่ 22 แสดงผลการคำนวณเงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุด (MIC) สำหรับกระบวนการส่วนเกินกรณี 3 ปี ภายใต้ค่าเพื่อความปลอดภัยและระดับความเสี่ยงที่ยอมรับได้แตกต่างกัน (α) พบว่าเมื่อค่าเพื่อความปลอดภัยเพิ่มขึ้นจะส่งผลให้ค่าเงินทุนเริ่มต้นมีแนวโน้มที่ลดลงในทุกระดับของความเสี่ยงที่ยอมรับได้ ในทางกลับกันเมื่อระดับความเสี่ยงที่ยอมรับได้มีค่าเพิ่มขึ้น พบว่าค่าเงินทุนเริ่มต้นจะลดลงในทุกระดับของค่าเพื่อความปลอดภัย



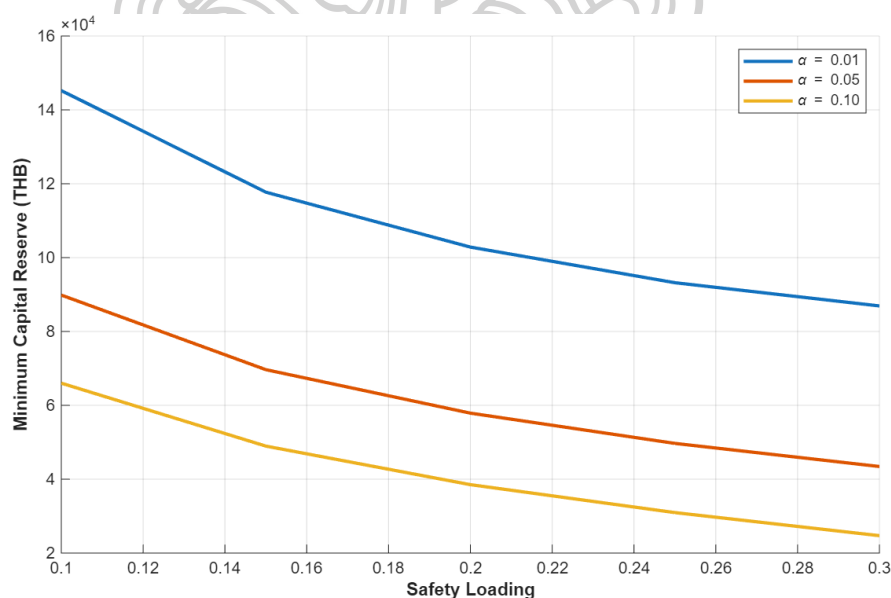
ภาพที่ 24 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเพื่อความปลอดภัยและเงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุดสำหรับกระบวนการส่วนเกินกรณี 3 ปี

จากภาพที่ 24 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการล้มละลายและเงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุดกรณี 3 ปี ณ ค่า ค่าเพื่อความปลอดภัยที่เท่ากับ 0.10, 0.15, 0.20, 0.25 และ 0.30 พบว่าเมื่อค่าเพื่อความปลอดภัยมีค่าเพิ่มขึ้น เงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุดจะลดลงในทุกกรณีของระดับความเสี่ยงมากที่สุดที่ยอมรับได้ทั้ง 3 ระดับ นอกจากนี้ เมื่อระดับความเสี่ยงมากที่สุดที่ยอมรับได้มีค่าเพิ่มขึ้น จะส่งผลให้เงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุดลดลงในทุกระดับของค่าเพื่อความปลอดภัย

ตารางที่ 23 เงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุด (MIC) สำหรับกระบวนการส่วนเกินกรณี 5 ปี ($n = 1,825$)

ค่าเพื่อความปลอดภัย (ϑ)	เงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุด (MIC)		
	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$
0.10	145,225.12	89,851.99	66,004.08
0.15	117,715.12	69,659.66	48,963.30
0.20	102,848.00	57,887.54	38,524.12
0.25	93,201.24	49,695.00	30,957.88
0.30	86,915.25	43,435.51	24,709.81

จากตารางที่ 23 แสดงผลการคำนวณเงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุด (MIC) สำหรับกระบวนการส่วนเกินกรณี 5 ปี ภายใต้ค่าเพื่อความปลอดภัยและระดับความเสี่ยงที่ยอมรับได้แตกต่างกัน (α) พบว่าเมื่อค่าเพื่อความปลอดภัยเพิ่มขึ้นจะส่งผลให้ค่าเงินทุนเริ่มต้นมีแนวโน้มที่ลดลงในทุกระดับของความเสี่ยงที่ยอมรับได้ ในทางกลับกันเมื่อระดับความเสี่ยงที่ยอมรับได้มีค่าเพิ่มขึ้น พบว่าค่าเงินทุนเริ่มต้นจะลดลงในทุกระดับของค่าเพื่อความปลอดภัย



ภาพที่ 25 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเพื่อความปลอดภัยและเงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุดสำหรับกระบวนการส่วนเกินกรณี 5 ปี

จากภาพที่ 25 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการล้มละลายและเงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุดกรณี 5 ปี ณ ค่าเพื่อความปลอดภัยที่เท่ากับ 0.10, 0.15, 0.20, 0.25 และ 0.30 พบว่าเมื่อค่าเพื่อความปลอดภัยมีค่าเพิ่มขึ้น เงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุดจะลดลงในทุกกรณีของระดับความเสี่ยงมากที่สุดที่ยอมรับได้ทั้ง 3 ระดับ นอกจากนี้ เมื่อระดับความเสี่ยงมากที่สุดที่ยอมรับได้มีค่าเพิ่มขึ้น จะส่งผลให้เงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุดลดลงในทุกระดับของค่าเพื่อความปลอดภัย

ดังภาพที่ 23-25 สะท้อนให้เห็นถึงความสัมพันธ์ผกผันระหว่างเงินทุนเริ่มต้นต่ำที่สุดกับทั้งค่าเพื่อความปลอดภัยและระดับความเสี่ยงที่ยอมรับได้อย่างชัดเจน



บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของความสูญเสียทางประกันภัยให้สอดคล้องกับข้อมูลการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน โดยพิจารณาทั้งข้อมูลจำนวนครั้งและข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน พร้อมทั้งทำการทดสอบความเหมาะสมของการแจกแจงความน่าจะเป็นที่สร้างขึ้นด้วยสถิติทดสอบโครโมโกรอฟ สมีร์นอฟ (Kolmogorov-Smirnov test : KS test) และสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิ่ง (Anderson-Darling test : AD test) นอกจากนี้ยังนำการแจกแจงที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในการสร้างตัวแบบสำหรับการคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย – เพิ่มเบี้ย (Bonus-Malus System: BMS) โดยพิจารณาทั้งจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนร่วมกัน ภายใต้กรอบแนวคิดของเบย์เซียน

อีกทั้งในงานวิจัยนี้ได้เลือกการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมาะสมสำหรับมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหม เพื่อนำมาใช้ในการจำลองข้อมูลการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของผู้เอาประกันภัยแบบรายวัน ด้วยวิธี Acceptance-rejection สำหรับนำมาใช้ในกระบวนการส่วนเกินเวลาไม่ต่อเนื่อง เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเงินทุนเริ่มต้นกับความน่าจะเป็นในการล้มละลายของ บริษัทประกันภัย รวมถึงการกำหนดเงินทุนเริ่มต้นที่ต่ำที่สุดสำหรับการลงทุนในธุรกิจประกันวินาศภัย ภายใต้ความเสี่ยงมากที่สุดที่บริษัทสามารถยอมรับได้

5.1 สรุปผลการวิจัย

5.1.1 ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น

งานวิจัยนี้ได้ทำการสร้างฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของความสูญเสีย ได้แก่ ฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (PNTWED) และฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (PACRTED) สำหรับส่วนประกอบจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (GNTWED) และฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (GACRTED) สำหรับส่วนประกอบมูลค่าของการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน เมื่อพิจารณาประสิทธิภาพของฟังก์ชันการแจกแจงที่นำเสนอซึ่งใช้ข้อมูลประกันภัยรถยนต์ของบริษัทประกันวินาศภัยทั้ง 5 ชุดข้อมูล สำหรับข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน(ข้อมูลชุดที่1-3) พบว่าฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก และฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-

เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ ให้ค่าสถิติทดสอบไคกำลังสองที่ต่ำกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับผลการแจกแจงปัวซอง การแจกแจงปัวซอง-ลินด์ลีย์ 1 พารามิเตอร์ และการแจกแจงปัวซอง-ลินด์ลีย์ 2 พารามิเตอร์ ซึ่งบ่งบอกถึงความเหมาะสมในการอธิบายลักษณะของข้อมูลจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของประกันภัยรถยนต์ได้ดี ในส่วนของข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน (ข้อมูลชุดที่ 4-5) พบว่าฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก และฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ ให้ค่าสถิติทดสอบโครโมโกรอฟ-สมิธรโนฟ และค่าสถิติแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิ่ง ที่ต่ำกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับผลการแจกแจงแกมมา ซึ่งบ่งบอกถึงความเหมาะสมในการอธิบายลักษณะของข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของประกันภัยรถยนต์ได้ดี

5.1.2 การคำนวณเบี้ยประกัน

การคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย (Bonus-Malus System: BMS) โดยพิจารณาจำนวนครั้งในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน พบว่าเบี้ยประกันภัยภายใต้ฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก และฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก มีแนวโน้มลดลงเมื่อผู้เอาประกันภัยไม่มีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน และเบี้ยประกันจะเพิ่มขึ้นเมื่อผู้เอาประกันภัยมีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน

การคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย โดยพิจารณาทั้งจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนร่วมกัน ในงานวิจัยนี้นำเสนอด้วยกัน 2 ตัวแบบ ได้แก่

1) ตัวแบบคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย โดยพิจารณาองค์ประกอบจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนภายใต้ฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (PNTWE) และฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (GNTWE) เบี้ยประกันภัยภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยที่พิจารณาทั้งจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนมีการปรับเปลี่ยนตามพฤติกรรมความเสี่ยงของผู้เอาประกันภัย โดยเบี้ยประกันภัยจะลดลงเมื่อไม่มีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน และเพิ่มขึ้นเมื่อมีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนทั้งในด้านจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน เบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยสะท้อนถึงความเหมาะสมของการกำหนดเบี้ยประกันภัยตามระดับความเสี่ยงของผู้เอาประกันภัย

2. ตัวแบบคำนวณเบี้ยประกันภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย โดยพิจารณาองค์ประกอบจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนภายใต้ฟังก์ชันการแจกแจงปัวซอง-เลขชี้กำลัง

แบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (PACRTE) และฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลังแบบแปลงอันดับกำลังสามที่ถูกปรับ (GACRTE) พบว่าเบี้ยประกันภัยไม่สอดคล้องกับหลักการของระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย กล่าวคือเบี้ยประกันภัยไม่เพิ่มขึ้นตามจำนวนครั้งและมูลค่าการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนอย่างเหมาะสม ส่งผลให้โครงสร้างเบี้ยประกันภัยผิดไปจากหลักการของระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย ดังนั้นตัวแบบดังกล่าวยังไม่เหมาะสมสำหรับการนำไปประยุกต์ใช้ในการกำหนดเบี้ยประกันภัยในอุตสาหกรรมประกันภัย

5.1.3 ตัวแบบความเสี่ยงภัย

เมื่อพิจารณาการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมาะสมในการอธิบายลักษณะข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนภายใต้ข้อมูลชุดที่ 4 พบว่าการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก (GNTWE) มีความเหมาะสม ดังนั้นจึงทำการจำลองข้อมูลมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนตามการแจกแจงแกมมา-เลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์แบบถ่วงน้ำหนัก โดยการใช้การแจกแจงดังกล่าวในการประมาณความน่าจะเป็นในการล้มละลายของกระบวนการส่วนเกินเวลาไม่ต่อเนื่องภายใต้ระยะเวลา 1 ปี ($n=365$) 3 ปี ($n=1,095$) และ 5 ปี ($n=1,825$) เมื่อ n แทนจำนวนวันที่กำหนด ทั้งนี้ในการประมาณค่าดังกล่าวดำเนินการภายใต้ระดับของค่าเพื่อความปลอดภัยและระดับความเสี่ยงที่มากที่สุดที่บริษัทสามารถยอมรับได้ ผลการวิจัยพบว่าเมื่อเงินทุนเริ่มต้นเพิ่มขึ้นส่งผลให้ความน่าจะเป็นในการล้มละลายลดลง เช่นเดียวกันกับค่าเพื่อความปลอดภัยที่เพิ่มขึ้นที่ทำให้ความน่าจะเป็นในการล้มละลายลดลง นอกจากนี้เมื่อเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายกรณี 1 ปี 3 ปี และ 5 ปี พบว่าเมื่อกระบวนการส่วนเกินถูกดำเนินไปในระยะเวลายาวนานขึ้นส่งผลให้ความน่าจะเป็นในการล้มละลายเพิ่มขึ้นในทุกระดับของค่าเพื่อความปลอดภัย

ในส่วนของการคำนวณเงินทุนเริ่มต้นที่ต่ำที่สุด (MIC) ด้วยฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลาย $\hat{\Phi}(t)$ กับเงินทุนเริ่มต้น U_0 ที่กำหนดภายใต้ระดับความเสี่ยงที่มากที่สุดที่สามารถยอมรับได้ α จากผลการวิจัยสรุปได้ว่าค่า MIC จะลดลงเมื่อค่าเพื่อความปลอดภัยเพิ่มมากขึ้น และเมื่อพิจารณาภายใต้ระดับความเสี่ยงที่สามารถยอมรับได้เพิ่มขึ้น จะพบว่าค่า MIC จะลดลงในทุกกรณีของค่าเพื่อความปลอดภัย

5.2 อภิปรายผลการวิจัย

การคำนวณเบี้ยประกันภัยภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยโดยอาศัยฟังก์ชันการแจกแจงที่เหมาะสมสามารถสะท้อนไปยังพฤติกรรมการชดเชยของผู้เอาประกันภัยผ่านมูลค่าของเบี้ยประกันที่ต้องชำระในปีถัดไปอย่างเหมาะสม กล่าวคือผู้เอาประกันภัยที่มีประวัติความเสี่ยงต่ำหรือมีพฤติกรรม

ข้อที่ที่ดีจะได้รับการให้รางวัลในรูปแบบของเบี้ยประกันภัยที่ลดลง (Bonus) ขณะที่ผู้เอาประกันภัยที่มีการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทน ซึ่งสะท้อนถึงพฤติกรรมของการข้อที่มีความเสี่ยง จะต้องเผชิญกับการปรับเพิ่มเบี้ยประกันภัยในปีถัดไป (Malus) ผลลัพธ์ดังกล่าวแสดงให้เห็นกลไกการทำงานของระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ยที่ทำหน้าที่เป็นแรงจูงใจให้ผู้เอาประกันภัยปรับพฤติกรรมของการข้อ รวมไปถึงช่วยให้การกำหนดเบี้ยประกันภัยมีความสอดคล้องและเป็นธรรมต่อผู้เอาประกันภัยในแต่ละรายที่มีพฤติกรรมของการข้อที่ต่างกัน

ผลลัพธ์จากการวิเคราะห์ชี้ให้เห็นว่า การปรับใช้ตัวแบบที่ยอมรับความเสี่ยงในระดับสูงขึ้น ควบคู่กับการกำหนดค่าเผื่อความปลอดภัยที่มากขึ้น ส่งผลให้ความต้องการเงินทุนเริ่มต้นขั้นต่ำ (Minimum Initial Capital: MIC) ลดลง สะท้อนถึงความสัมพันธ์ผกผันระหว่างค่า MIC กับทั้งค่าเผื่อความปลอดภัยและระดับความเสี่ยงที่ยอมรับ ในทางกลับกันเมื่อระยะเวลาที่พิจารณาเพิ่มมากขึ้น ส่งผลให้เงินทุนเริ่มต้นขั้นต่ำมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นในทุกระดับของความเสี่ยง และค่าเผื่อความปลอดภัยแสดงให้เห็นว่าปัจจัยด้านระยะเวลามีผลกระทบโดยตรงต่อระดับเงินทุนสำรองของบริษัท โดยระยะเวลายาวขึ้นจำเป็นต้องมีเงินทุนสำรองสูงขึ้นเพื่อบรรเทาความเสี่ยงจากการล้มละลาย ผลการศึกษานี้สะท้อนให้เห็นถึงความสำคัญของการพิจารณาปัจจัยด้านระยะเวลา ร่วมกับค่าเผื่อความปลอดภัย และระดับความเสี่ยงที่ยอมรับได้ควบคู่กันในการกำหนดกลยุทธ์การจัดสรรเงินทุนสำรองของบริษัทประกันภัย เพื่อให้สามารถรองรับความเสี่ยงจากการล้มละลายในระยะยาวได้อย่างเพียงพอ และวางแผนในการบริหารความเสี่ยงที่มีประสิทธิภาพและเหมาะสมตามระดับความเสี่ยงที่บริษัทยอมรับได้

5.3 ข้อเสนอแนะงานวิจัย

5.3.1 ในการประเมินความเหมาะสมของฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นควรพิจารณาใช้หลักเกณฑ์อื่นเพิ่มเติม เนื่องจากเกณฑ์ AIC และ BIC มีความสำคัญกับจำนวนพารามิเตอร์ของการแจกแจงเป็นหลัก และในกรณีของ BIC ยังคำนึงถึงขนาดตัวอย่างร่วมด้วย โดยงานวิจัยนี้มีจำนวนพารามิเตอร์ที่ต้องทำการประมาณค่อนข้างมาก รวมทั้งมีขนาดตัวอย่างจำนวนมากเช่นกัน ผู้วิจัยจึงคาดว่าปัจจัยดังกล่าวอาจส่งผลให้ค่า AIC และ BIC มีค่าสูงขึ้น และอาจไม่สอดคล้องกับค่าสถิติทดสอบที่นำมาพิจารณาร่วมในการประเมินความเหมาะสมของการแจกแจงความน่าจะเป็น

5.3.2 งานวิจัยนี้พิจารณาทั้งจำนวนครั้งและมูลค่าในการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนร่วมกัน ในการคำนวณเบี้ยประกันภัยภายใต้ระบบลดเบี้ย-เพิ่มเบี้ย เพื่อให้การคำนวณเบี้ยประกันภัยมีความสอดคล้องและเป็นธรรมต่อผู้ถือกรมธรรม์ อย่างไรก็ตาม ในการกำหนดเบี้ยประกันภัยให้มีความ

เหมาะสมยิ่งขึ้น อาจพิจารณาปัจจัยอื่นร่วมด้วย เช่น อายุของผู้ถือกรรมสิทธิ์ ประเภทของรถยนต์ อายุการใช้รถยนต์ของผู้ถือกรรมสิทธิ์ และปัจจัยอื่น ๆ

5.3.3 ในการคำนวณเงินทุนเริ่มต้นขั้นต่ำของบริษัทประกันวินาศภัยควรเลือกฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมาะสมกับลักษณะข้อมูลการเรียกร้องค่าสินไหมทดแทนของแต่ละบริษัท โดยพิจารณาจากรูปแบบการกระจายของข้อมูล เช่น การสังเกตจากฮิสโตแกรม เพื่อให้การประมาณค่าความน่าจะเป็นและการกำหนดเงินทุนเริ่มต้นขั้นต่ำมีความเหมาะสมและมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

5.3.4 ในการกำหนดค่าเงินทุนเริ่มต้น $U_0 = u$ สำหรับตัวแบบความเสี่ยงภัยเพื่อประเมินความน่าจะเป็นในการล้มละลายของบริษัท ควรพิจารณาให้สอดคล้องกับลักษณะการแจกแจงของข้อมูลที่ใช้ในกระบวนการส่วนเกิน (surplus process) อย่างรอบคอบ ทั้งนี้ เนื่องจากการกำหนดค่าเงินทุนเริ่มต้นในระดับที่สูงเกินไป อาจส่งผลให้ค่าความน่าจะเป็นในการล้มละลายมีค่าเป็นศูนย์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีที่มีการกำหนดค่าเผื่อความปลอดภัย (safety loading) ในอัตราที่สูงร่วมด้วย ซึ่งอาจทำให้ผลการวิเคราะห์ไม่สะท้อนความเสี่ยงที่แท้จริงของบริษัทประกันภัย



รายการอ้างอิง

- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification problem. *IEEE Trans. Autom. Control*, 19, 716.
- Al-Kadim, K. A., & Boshi, M. A. (2013). exponential Pareto distribution. *Mathematical Theory and Modeling*, 3(5), 135-146.
- AL-Kadim, K. A., & Mohammed, M. H. (2017). The cubic transmuted Weibull distribution. *Journal of University of Babylon*, 3, 862-876.
- Aryal, G. R., & Tsokos, C. P. (2011). Transmuted Weibull distribution: A generalization of the Weibull probability distribution. *European Journal of pure and applied mathematics*, 4(2), 89-102.
- Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian journal of statistics*, 171-178.
- Cancho, V. G., Louzada-Neto, F., & Barriga, G. D. (2011). The Poisson-exponential lifetime distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, 55(1), 677-686.
- Chesneau, C., Kumar, V., Khetan, M., & Arshad, M. (2022). On a modified weighted exponential distribution with applications. *Mathematical and Computational Applications*, 27(1), 17.
- Chesneau, C., Tomy, L., & Jose, M. (2024). On a New Two-parameter Weighted Exponential Distribution and Its Application to the COVID-19 and Censored Data. *Thailand Statistician*, 22(1), 17-30.
- Cramér, H. (1999). *Mathematical methods of statistics* (Vol. 9). Princeton university press.
- De Jong, P., & Heller, G. Z. (2008). *Generalized linear models for insurance data*. Cambridge University Press.
- Denuit, M. (1997). A new distribution of Poisson-type for the number of claims. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 27(2), 229-242.
- Emad, A., & Ali, I. (2016). Bayesian approach for bonus-malus systems with Gamma distributed claim severities in vehicles insurance. *British Journal of Economics, Management, and Trade*, 14(1), 1-9.

- Frangos, N. E., & Vrontos, S. D. (2001). Design of optimal bonus-malus systems with a frequency and a severity component on an individual basis in automobile insurance. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 31(1), 1-22.
- Gleser, L. J. (1989). The gamma distribution as a mixture of exponential distributions. *The American Statistician*, 43(2), 115-117.
- Gómez-Déniz, E. (2016). Bivariate credibility bonus–malus premiums distinguishing between two types of claims. *Insurance: Mathematics and Economics*, 70, 117-124.
- Gómez-Déniz, E., & Calderín-Ojeda, E. (2018). Multivariate credibility in bonus-malus systems distinguishing between different types of claims. *Risks*, 6(2), 34.
- Gómez-Déniz, E., Hernández-Bastida, A., & Fernández-Sánchez, M. P. (2014). Computing credibility bonus-malus premiums using the total claim amount distribution. *Haceteppe Journal of Mathematics and Statistics*, 43(6), 1047-1061.
- Granzotto, D., Louzada, F., & Balakrishnan, N. (2017). Cubic rank transmuted distributions: inferential issues and applications. *Journal of statistical Computation and Simulation*, 87(14), 2760-2778.
- Greenwood, M., & Yule, G. U. (1920). An inquiry into the nature of frequency distributions representative of multiple happenings with particular reference to the occurrence of multiple attacks of disease or of repeated accidents. *Journal of the Royal statistical society*, 83(2), 255-279.
- Gupta, R. D., & Kundu, D. (2009). A new class of weighted exponential distributions. *Statistics*, 43(6), 621-634.
- Hernawati, L., Purnaba, I. G. P., & Mangku, I. W. (2017). Comparing bonus malus premiums of two types claim which is assessed using Bayesian method. *Applied Mathematical Sciences*, 11(34), 1687-1694.
- Ibiwoye, A., Adeleke, I., & Aduloju, S. A. (2011). Quest for optimal bonus-malus in automobile insurance in developing economies: An actuarial perspective. *International Business Research*, 4(4), 74-83.
- leosanurak, W., Khomkham, B., & Moumeesri, A. (2023). Claim modeling and insurance premium pricing under a bonus-malus system in motor insurance. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 33(4).

- leosanurak, W., & Moumeesri, A. (2025a). An Adaptive Quadratic Transmuted Exponential Distribution: Unbounded Weight Parameter and Mixed Poisson Model Integrations. *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, 1-22.
- leosanurak, W., & Moumeesri, A. (2025b). Estimating Ruin Probability in an Insurance Risk Model Using the Wang-PH Transform Through Claim Simulation. *Emerging Science Journal*, 9(1), 188-209.
- Jacob, A., & Wu, Z. (2020). An Alternative Pricing System through Bayesian Estimate and Method of Moments in Bonus-Malus Framework for the Ghanaian Auto Insurance Market. *Journal of Risk and Financial Management*, 13(7), 143.
- Kharazmi, O., Mahdavi, A., & Fathizadeh, M. (2015). Generalized weighted exponential distribution. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 44(6), 1557-1569.
- Landsman, Z. M., & Makov, U. E. (1998). Exponential dispersion models and credibility. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1998(1), 89-96.
- Lemaire, J. (1995). *Bonus-malus systems in automobile insurance* (Vol. 19). Springer science & business media.
- Merovci, F. (2013). Transmuted lindley distribution. *Int. J. Open Problems Compt. Math*, 6(2), 63-72.
- Merovci, F., & Puka, L. (2014). Transmuted pareto distribution. *ProbStat Forum*,
- Mert, M., & Saykan, Y. (2005). On a bonus-malus system where the claim frequency distribution is geometric and the claim severity distribution is Pareto. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 34(1), 75-81.
- Moumeesri, A., & Pongsart, T. (2022). Bonus-malus premiums based on claim frequency and the size of claims. *Risks*, 10(9), 181.
- Myung, I. J. (2003). Tutorial on maximum likelihood estimation. *Journal of mathematical Psychology*, 47(1), 90-100.
- Ni, W., Constantinescu, C., & Pantelous, A. A. (2014). Bonus–Malus systems with Weibull distributed claim severities. *Annals of Actuarial Science*, 8(2), 217-233.
- Oguntunde, P. E., Ilori, K. A., & Okagbue, H. I. (2018). The inverted weighted exponential distribution with applications. *International Journal of Advanced and Applied*

Sciences, 5(11), 46-50.

- Rahman, M. M., Al-Zahrani, B., & Shahbaz, M. Q. (2018a). A general transmuted family of distributions. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 451-469.
- Rahman, M. M., Al-Zahrani, B., & Shahbaz, M. Q. (2018b). New general transmuted family of distributions with applications. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 807-829.
- Rahman, M. M., Al-Zahrani, B., Shahbaz, S. H., & Shahbaz, M. Q. (2019). Cubic transmuted uniform distribution: An alternative to beta and kumaraswamy distributions. *European Journal of pure and applied mathematics*, 12(3), 1106-1121.
- Sankaran, M. (1970). 275. note: The discrete poisson-lindley distribution. *Biometrics*, 145-149.
- Sarul, L. S., & Sahin, S. (2015). An application of claim frequency data using zero inflated and hurdle models in general insurance. *Journal of Business Economics and Finance*, 4(4).
- Sattayatham, P., Sangaroon, K., & Klongdee, W. (2013). Ruin probability-based initial capital of the discrete-time surplus process. *Variance*, 7(1), 74-81.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *The annals of statistics*, 461-464.
- Shanker, R., Sharma, S., & Shanker, R. (2012). A discrete two-parameter Poisson Lindley distribution. *Journal of Ethiopian Statistical Association*, 21, 15-22.
- Shaw, W. T., & Buckley, I. R. (2009). The alchemy of probability distributions: beyond Gram-Charlier expansions, and a skew-kurtotic-normal distribution from a rank transmutation map. *arXiv preprint arXiv:0901.0434*.
- Tremblay, L. (1992). Using the Poisson inverse Gaussian in bonus-malus systems. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 22(1), 97-106.
- Walhin, J.-F., & Paris, J. (1999). Using Mixed Poisson Processes in Connection with Bonus-Malus Systems1. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 29(1), 81-99.



ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล

Mr. Jiramet Hengcharoensuk

วุฒิการศึกษา

2014-2019 High School Ratchaborikanukroh, Ratchaburi, Thailand.

2020-2023 Bachelor of Science in Statistics, Silpakorn University, Thailand

2024-2025 Master of Science in Applied Statistics, Silpakorn University, Thailand

ผลงานตีพิมพ์

Hengcharoensuk, J., Phanmai, K., & Moumeesri, A. (2024).

Modelling of Claim and Pricing of Motor Insurance Based on Bonus-Malus System Considering the Frequency and Severity of Claims. Science and Technology Indonesia, 9(4), 904-913.

Hengcharoensuk, J., & Moumeesri, A. (2025). Ruin probability analysis in automobile insurance using gamma-Cubic transmuted exponential distribution for claim severity. International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences, 10(2), 486.

Hengcharoensuk, J., & Moumeesri, A. (2025) The Mixed Poisson Distribution with a New Two-Parameter Weighted Exponential Distribution for Overdispersed Count Data and Its Application in Motor Insurance. Proceedings of the 29th Annual Meeting in Mathematics (AMM 2025) The Emerald Hotel, Bangkok. Thailand. 21-23 May 2025. p. 488–507.